1. *Sur l'Application Qui Fait Correspondre à une Courbe une Famille de Courbes*

Par Tokui SATŌ
Institut de Mathématiques, Université de Kōbe
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1955)

1. Le but de cette présente note est à établir, en étendant l'idée de M. le prof. M. Hukuhara[1] à l'équation intégrale de Volterra, un théorème analogue à Kneser.

2. Désignons par $\vec{f}$ un système de n fonctions réelles $f_1(x),\dots,$ $f_n(x)$ continues dans $[0,1]$. L'ensemble de tous les $\vec{f}$ forme un espace linéaire (C), si nous introduisons la distance $\rho(\vec{f},\vec{g})$ par $\max\limits_{0\leq x\leq 1}\{|f_1(x)-g_1(x)|,\dots,|f_n(x)-g_n(x)|\}$.

Nous considérons une application K qui fait correspondre à $\vec{f}\in(C)$ et à $\lambda\in[0,1]$ un ensemble contenu dans (C): $(\vec{f},\lambda)\cdot K$ et qui satisfait aux conditions suivantes:

I. K est *compacte*, i.e. $\mathfrak{F}\cdot K=\bigcup\limits_{0\leq\lambda\leq 1}(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est compacte si $\mathfrak{F}$ l'est, où $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ désigne la réunion $\bigcup\limits_{\vec{f}\in\mathfrak{F}}(\vec{f},\lambda)\cdot K$;

II. K est *semi-continue supérieurement*, i.e. si l'on a $\vec{u}_n\in(\vec{f}_n,\lambda_n)\cdot K$ et $\vec{f}_n\to\vec{f}$, $\lambda_n\to\lambda$, $\vec{u}_n\to\vec{u}$ pour $n\to\infty$, on a $\vec{u}\in(\vec{f},\lambda)\cdot K$;

III. K est knesérienne, i.e. $(\vec{f},\lambda)\cdot K$ est un continu dans (C) quels que soient $\vec{f}$ et λ.

On a alors le

Théorème 1. *Si $\mathfrak{F}$ est un continu dans (C), $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est aussi un continu.*

On voit sans peine que $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est fermé. S'il n'était pas un continu, il existerait deux ensembles fermés et disjoints $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$ tels que $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K=\mathfrak{B}^1\smile\mathfrak{B}^2$. Définissons $\mathfrak{F}^j\,(j=1,2)$ par $\mathfrak{F}^j=\{\vec{f}\in\mathfrak{F};\ \mathfrak{B}^j\frown(\vec{f},\lambda)\cdot K\neq 0\}$. On a évidemment $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^1\smile\mathfrak{F}^2$. Il est aisé de voir que $\mathfrak{F}^j\,(j=1,2)$ sont fermés. Donc $\mathfrak{F}^1\frown\mathfrak{F}^2\neq 0$. Soit $\vec{g}\in\mathfrak{F}^1\frown\mathfrak{F}^2$. $\mathfrak{B}^j(\vec{g},\lambda)=\mathfrak{B}^j\frown(\vec{g},\lambda)\cdot K\,(j=1,2)$ seraient fermés et disjoints. On aurait de plus $(\vec{g},\lambda)\cdot K=\mathfrak{B}^1(\vec{g},\lambda)\smile\mathfrak{B}^2(\vec{g},\lambda)$. Donc, $(\vec{g},\lambda)\cdot K$ ne serait pas un continu.

On a de même le

---

1) M. Hukuhara: Sur les familles de fonctions à une variable réelle, Journ. Fac. Sc. Hokkaidō Imp. Univ., I, **1**, 163–209 (1932).

Corollaire. *Si* $\mathfrak{F}$ *est un continu dans* (C), $\mathfrak{F}\cdot K$ *est aussi un continu dans* (C).

Soient K et $K_n (n=1,2,\dots)$ des applications dont le domaine est $\mathfrak{F}\times[0,1]$.

Supposons que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}\cdot K_n$ *soit compacte dans* (C) *pour* $\mathfrak{F}$ *compacte.*

Si, $\lambda_n(\in[0,1])$ tendant vers λ, la limite d'une suite partielle convergente quelconque $\{\vec{u}_n(x,\lambda_n)\}(\vec{u}_n(x,\lambda_n)\in(\mathfrak{F},\lambda_n)\cdot K_n)$ appartient toujours à $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$, on dira que la suite $\{K_n\}$ *a la propriété* (T) *pour* K *dans* $\mathfrak{F}\times[0,1]$.

On dira que $(\vec{f},0)\cdot K$ est *sans manque*, si l'on peut faire correspondre à un élément quelconque $\vec{u}$ de $(\vec{f},0)\cdot K$ un système des fonctions $\vec{g}(x,\lambda)$ continues dans $[0,1]\times[0,1]$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

i) Si l'on a $\vec{v}(x,\lambda)\in(\vec{g},\lambda)\cdot K$ et

$$\vec{w}(x,\lambda)=\begin{cases}\vec{u}(x) & 0\leq x\leq\lambda,\\ \vec{v}(x,\lambda) & \lambda\leq x\leq 1,\end{cases}$$

on a $\vec{w}(x,\lambda)\in(\vec{f},0)\cdot K$.

ii) Posons $\mathfrak{G}(\vec{u})=\bigcup_{0\leq\lambda\leq 1}\vec{g}(x,\lambda)$. $\mathfrak{G}(\vec{u}^1)$ et $\mathfrak{G}(\vec{u}^2)$ ont au moins un élément commun, $\vec{u}^1$ et $\vec{u}^2$ désignant deux éléments quelconques de $(\vec{f},0)\cdot K$.

Théorème 2. *Soient* K_n *des applications compactes, semi-continues supérieurement et kneseriennes.*

Si $(\vec{f},0)\cdot K$ *est sans manque et si la suite* $\{K_n\}$ *a la propriété* (T) *pour* K *dans* $\mathfrak{G}\times[0,1]$, *où* $\mathfrak{G}=\{\mathfrak{G}(\vec{u});\vec{u}\in(\vec{f},0)\cdot K\}$, $(\vec{f},0)\cdot K$ *est un continu dans l'espace* (C).

Soient $\vec{u}^j(j=1,2)$ deux éléments quelconques de $(\vec{f},0)\cdot K$. D'après le corollaire du théorème 1, $\mathfrak{G}^j\cdot K_n(j=1,2)$, $(\mathfrak{G}^1\smile\mathfrak{G}^2)\cdot K_n$ sont des continus dans (C), où $\mathfrak{G}^j=\mathfrak{G}(\vec{u}^j)$.

Désignons par $\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1,\vec{u}^2)$ la famille des fonctions $\vec{w}_n^j(x,\lambda)$ qui peuvent s'écrire

$$\vec{w}_n^j(x,\lambda)=\begin{cases}\vec{u}^j(x) & 0\leq x\leq\lambda,\\ \vec{v}_n^j(x,\lambda) & \lambda\leq x\leq 1,\end{cases}$$

où $\vec{v}_n^j(x,\lambda)$ désigne un élément quelconque de $(\vec{g}^j,\lambda)\cdot K_n$ $(\vec{g}^j\in\mathfrak{G}^j)$.

Il est clair que $\vec{u}^j\in\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1,\vec{u}^2)$ $(j=1,2,\ n=1,2,\dots)$ et que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1,\vec{u}^2)$ est compacte dans (C). Par la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 1, on peut conclure que $\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1,\vec{u}^2)$ $(n=1,2,\dots)$ sont des continus dans (C).

Posons

$$\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1,\vec{u}^2)=\text{p.g.l. }\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1,\vec{u}^2),$$

où p.g.l. $\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ est la plus grande limite[2] de la suite $\{\mathfrak{W}_n(\vec{u}^1, \vec{u}^2)\}$. Par définition on a $\vec{u}^j \in \overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ $(j=1, 2)$, et $\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ est fermé. Pour montrer

$$\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2) \subseteq (\vec{f}, 0)\cdot K,$$

prenons un élément quelconque $\vec{w}(x, \lambda) \in \overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ et supposons, par exemple, $\vec{w}_n^1(x, \lambda_n) \to \vec{w}(x, \lambda)$ pour $n \to \infty$. Par définition

$$\vec{w}_n^1(x, \lambda_n) = \begin{cases} \vec{u}^1(x) & 0 \leq x \leq \lambda_n, \\ \vec{v}_n^1(x, \lambda_n) & \lambda_n \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \vec{v}_n^1(x, \lambda_n) \in (\vec{g}^1, \lambda_n)\cdot K_n.$$

Comme $\{K_n\}$ a la propriété (T) pour K, on a $\vec{v}_n^1(x, \lambda_n) \to \vec{v}^1(x, \lambda) \in \mathfrak{G}^1\cdot K$. $(\vec{f}, 0)\cdot K$ étant sans manque, on a $\vec{w}(x, \lambda) \in (\vec{f}, 0)\cdot K$. On obtient donc $\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2) \subseteq (\vec{f}, 0)\cdot K$.

Pour que $(\vec{f}, 0)\cdot K$ soit un continu dans (C), il suffit de montrer que $\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ est un continu dans (C). S'il n'était pas un continu, il existerait deux ensembles $\overline{\mathfrak{W}}^1, \overline{\mathfrak{W}}^2$ fermés et disjoints tels que

$$\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2) = \overline{\mathfrak{W}}^1 \smile \overline{\mathfrak{W}}^2.$$

Etant $\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2) \subseteq (\vec{f}, 0)\cdot K$, $\overline{\mathfrak{W}}^1$ et $\overline{\mathfrak{W}}^2$ sont compacts. On aurait donc un nombre δ positif tel que

$$\rho(\overline{\mathfrak{W}}^1, \overline{\mathfrak{W}}^2) > \delta.$$

Supposons, par exemple, que $\vec{u}^1 \in \overline{\mathfrak{W}}^1$. Soient $\vec{w}(x, \lambda) \in \overline{\mathfrak{W}}^2$ et $\{\vec{w}_m(x, \lambda_m)\}$ une suite convergente vers $\vec{w}(x, \lambda)$, où $\vec{w}_m(x, \lambda_m) \in \mathfrak{W}_m(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$. Par définition on obtient un entier m_j tel que

$$\rho(\vec{w}_{m_j}(x, \lambda_{m_j}), \vec{w}(x, \lambda)) < \delta/6, \quad (\vec{w}_{m_j}(x, \lambda_{m_j}) \in \mathfrak{W}_{m_j}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)).$$

$\mathfrak{W}_{m_j}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ étant un continu, on peut joindre $\vec{w}(x, \lambda)$ et $\vec{u}^1$ par une $\delta/6$-chaîne appartenant à $\mathfrak{W}_{m_j}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$. Par suite il existerait $\underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j})$ tel que

$$\rho(\underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j}), \overline{\mathfrak{W}}^1), \quad \rho(\underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j}), \overline{\mathfrak{W}}^2) > \delta/6, \quad \underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j}) \in \mathfrak{W}_{m_j}(\vec{u}^1, \vec{u}^2).$$

On obtient une suite $\{\underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j})\}$. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{W}_n(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ étant compact, on peut supposer sans perdre la généralité que $\{\underline{\vec{w}}_{m_j}(x, \lambda_{m_j})\}$ converge vers $\underline{\vec{w}}(x, \lambda)$. On aurait donc

$$\underline{\vec{w}}(x, \lambda) \bar{\in} \overline{\mathfrak{W}}^1 \smile \overline{\mathfrak{W}}^2.$$

$\overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2)$ étant fermé, on a

$$\underline{\vec{w}}(x, \lambda) \in \overline{\mathfrak{W}}(\vec{u}^1, \vec{u}^2),$$

ce qui est absurde.

3. Soient $\vec{f}(x)$ un système de n fonctions continues dans l'intervalle $[0, 1]$ et $\vec{K}(x, t, \vec{u})$ un système de n fonctions continues et

2) Soit une suite $\{E_n\}$ d'ensembles dans l'espace (C). Sa plus grande limite que nous désignerons par p.g.l. E_n est l'ensemble des points p tels que, quel que soit le voisinage $V(p)$ du point p, la relation $E_n \frown V(p) \neq 0$ soit verifiée pour une infinité de n.

bornées dans le domaine D: $0 \leq t \leq x \leq 1$; $|u_j| < \infty$ $(j=1, 2, \dots, n)$. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de $\vec{f}(x)$.

Considérons l'équation intégrale de Volterra

$$\vec{u}(x) = \vec{f}(x) + \int_\lambda^x \vec{K}(x, t, \vec{u}(t))\, dt \qquad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Soit $\vec{u} = \vec{u}(x, \lambda)$ une solution de cette équation. Faisons correspondre à $\vec{f}(x)$ et à $\lambda \in [0, 1]$ la famille des solutions $\vec{u}(x, \lambda)$, et désignons par $(\vec{f}, \lambda) \cdot K$ cette correspondance.

Supposons que $\mathfrak{F}$ *soit compacte et fermée dans l'espace* (C).

Dans ce cas on voit sans peine que les hypothèses I et II sont remplies.

Pour montrer que $(\vec{f}, 0) \cdot K$ est sans manque, il suffit de définir $\vec{g}(x, \lambda)$ par

$$\vec{g}(x, \lambda) = \vec{f}(x) + \int_0^\lambda \vec{K}(x, t, \vec{u}(t))\, dt.$$

On peut déterminer une suite des fonctions $\vec{K}_n(x, t, \vec{u})$ continues dans D, satisfaisant à la condition de Lipschitz relative à $\vec{u}$, et convergeant vers $\vec{K}(x, t, \vec{u})$ uniformément dans D.

Désignons par $(\vec{f}, \lambda) \cdot K_n$ la famille des solutions de l'équation

$$\vec{u}(x) = \vec{f}(x) + \int_\lambda^x \vec{K}_n(x, t, \vec{u}(t))\, dt.$$

On voit aisément que la suite des applications $\{K_n\}$ a la propriété (T) pour K dans $\mathfrak{G} \times [0, 1]$.

D'après le théorème 2, nous arrivons au théorème suivant.[3)]

Théorème 3. *La famille* $(\vec{f}, 0) \cdot K$ *des solutions de l'équation*

$$\vec{u}(x) = \vec{f}(x) + \int_0^x \vec{K}(x, t, \vec{u}(t))\, dt \tag{1}$$

est un continu dans l'espace (C).

D'après le théorème 1 nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit* $\mathfrak{F}$ *un continu compact dans* (C). *La famille* $(\mathfrak{F}, 0) \cdot K$ *des solutions de l'équation* (1) $(f(x) \in \mathfrak{F})$ *est un continu dans* (C).

3) Le théorème de Kneser relatif à l'équation intégrale de Volterra est une conséquence immédiate de ce théorème. Voir le théorème 18 dans mon mémoire: Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra, Comp. Math., **11**, 287 (1953).