12. *Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets. III*

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. Feb. 18, 1955)

1. Revenons au problème de complétion. Nous sommes maintenant dans la position de plonger R dans l'espace S. Pour ce but, introduisons d'abord deux axiomes suivants.

Axiome T_1 de séparation: Pour toute paire de deux points distincts p et q, il existe un voisinage $V(p)$ de p qui ne contient pas l'autre point q.

Axiome (b): *Soient p, q deux points quelconques de R. Supposons que p n'appartienne pas à un voisinage $V(q)$ de q dont le rang est γ: $V(q)\in\mathfrak{V}_\gamma$. Si r est un point distinct de q et si deux voisinages $u_1(r)$, $u_2(r)$ de r satisfont à l'inclusion $V(q)\supseteq u_1(r)\supseteq u_2(r)$ et si l'on a $u_1(r)\in\mathfrak{V}_{\gamma_1}$, $u_2(r)\in\mathfrak{V}_{\gamma_2}$, $\gamma\leq\gamma_1<\gamma_2$, alors il existe un voisinage $w(p)$ de p qui est disjoint de $u_2(r)$.*

Or, étant donné un point quelconque p de R, désignons par $\mathfrak{F}(p)$ la famille de toutes les suites fondamentales $v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots\supseteq v_\alpha(p_\alpha)\supseteq\cdots$, $0\leq\alpha<\omega_\mu$, dont tous les termes $v_\alpha(p_\alpha)$ contiennent le point p. Il faut remarquer d'abord que $\mathfrak{F}(p)$ *n'est pas vide*. En effet, choisissons un voisinage de rang quelconque $v(p)$ de p et posons $v_0(p)=v(p)$. Soit α un nombre ordinal tel que $0<\alpha<\omega_\nu$ et supposons que nous ayons déjà une suite des voisinages $v_0(p)\supseteq v_1(p)\supseteq\cdots\supseteq v_\beta(p)\supseteq\cdots$, $0\leq\beta<\alpha$ telle que $v_\beta(p)\in\mathfrak{V}_{\gamma_\beta}$, $\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_\beta<\cdots$. Alors, la partie commune $\bigcap_\beta v_\beta(p)$ contient un voisinage $u(p)$ de p, puisque α est inférieur à la profondeur $\omega(R)$. Posons $\gamma=\sup_\beta\gamma_\beta$ et appliquons la condition (a) à $u(p)$ et γ. Il existe alors un voisinage $v_\alpha(p)$ de p de rang γ_α supérieur à γ. Ainsi nous pouvons définir une suite fondamentale: $v_0(p)\supseteq v_1(p)\supseteq\cdots\supseteq v_\alpha(p)\supseteq\cdots$, $0\leq\alpha<\omega_\nu$ qui appartient à $\mathfrak{F}(p)$.

Deuxièmement, *la famille $\mathfrak{F}(p)$ est filtrante*, c'est-à-dire pour deux suites fondamentales de $\mathfrak{F}(p)$, $u=\{u_\alpha(p_\alpha)\}$, $u_\alpha(p_\alpha)\in\mathfrak{V}_{\gamma'_\alpha}$, $0\leq\alpha<\omega_{\mu_1}$, $v=\{v_\beta(q_\beta)\}$, $v_\beta(q_\beta)\in\mathfrak{V}_{\gamma''_\beta}$, $0\leq\beta<\omega_{\mu_2}$, il existe une suite de $\mathfrak{F}(p)$, $w=\{w_\gamma(r_\gamma)\}$, $0\leq\gamma<\omega_{\mu_3}$, $\omega_{\mu_3}\geq\max(\omega_{\mu_1},\omega_{\mu_2})$ telle qu'on ait à la fois $w\leq u$, $w\leq v$. Pour le voir, il faut remarquer d'abord que, sans restreindre la généralité, deux nombres ordinaux inaccessibles ω_{μ_1} et ω_{μ_2} peuvent être supposés égaux à ω_ν. D'abord, puisque nous avons $p\in u_0(p_0)\cap v_0(q_0)$, il existe, vu l'axiome (B) de Hausdorff, un voisinage $w(p)$ de p tel qu'on ait $w(p)\subseteq u_0(p_0)\cap v_0(q_0)$. Posons d'autre part $\gamma=\max(\gamma'_0,\gamma''_0)$. Appliquons la condition (a) à $w(p)$ et γ. Il existe donc un voisinage $w_0(p)$ de p contenu dans $w(p)$ et de rang, soit désigné par γ_0''', supérieur à γ. Soit ensuite α un nombre ordinal tel que $0<\alpha<\omega_\nu$, et supposons qu'on ait déjà choisi une suite des voisinages de p: $w_0(p)\supseteq w_1(p)\supseteq\cdots\supseteq w_\beta(p)\cdots$, $0\leq\beta<\alpha$ qui jouit aux propriétés suivantes: (1) $w_\beta(p)\subseteq u_\beta(p)\cap v_\beta(p)$; (2) $w_\beta(p)\in\mathfrak{B}\gamma_\beta'''$; $\beta_1<\beta_2$ entraîne $\gamma_{\beta_1}'''<\gamma_{\beta_2}'''$; (3) $\gamma_\beta'''\geq\max(\gamma_\beta, \gamma_\beta'')$. Puisque $\alpha<\omega_\nu\leq\omega(R)$, la suite $w_0(p)\supseteq w_1(p)\supseteq\cdots\supseteq w_\beta(p)\supseteq\cdots$ n'est pas maximale. Donc, il existe un voisinage $w(p)$ de p qui est contenu dans la partie commune $\bigcap_{0\leq\beta<\alpha} w_\beta(p)$. Posons d'autre part $\gamma^*=\sup_\beta \gamma_\beta'''$ et $\gamma_\alpha=\max(\gamma^*, \gamma_\alpha', \gamma_\alpha'')$. En vertu de l'axiome (B) de Hausdorff, il existe un voisinage $w'(p)$ de p, contenu dans la partie commune $w(p)\cap u_\alpha(p)\cap v_\alpha(p)$. Appliquons maintenant la condition (a) à $w'(p)$ et γ_α. Il existe donc un voisinage $w_\alpha(p)$ contenu dans $w'(p)$ et de rang γ_α''' supérieur à γ_α. Nous avons ainsi défini une suite fondamentale $w=\{w_\alpha(p)\}$, $0\leq\alpha<\omega_\nu$. La suite w ainsi défini satisfait, d'après le procédé des choix que nous avons effectués, à deux inégalités $w\leq u$, $w\leq v$.

Troisièmement, nous démontrons que $\mathfrak{F}(p)$ *est une collection maximale*. Si, par impossible, $\mathfrak{F}(p)$ n'est pas maximale, il existe une sous-famille proprement dite de $\mathfrak{F}(p)$ qui est aussi filtrante. Désignerons-le par $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ possède donc une suite fondamentale $u=\{u_\alpha(p_\alpha)\}$, $0\leq\alpha<\omega_\mu$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{F}(p)$.

Il y aura trois cas possibles. Premier cas où $\omega_\mu<\omega_\nu$. Nous avons déjà vu qu'il existe une suite fondamentale $v=\{v_\beta(p)\}$, $0\leq\beta<\omega_\nu$ qui appartient à $\mathfrak{F}(p)$. Puisque $\mathfrak{G}$ est filtrante, $\mathfrak{G}$ possède une suite fondamentale $w=\{w_\gamma(q_\gamma)\}$ qui satisfait à la fois à $w\leq u$ et à $w\leq v$. Or, w n'appartient pas à $\mathfrak{F}(p)$. En effet, si $w\in\mathfrak{F}(p)$, on aurait $p\in w_\gamma(q_\gamma)$ pour tout γ, $0\leq\gamma<\omega_\nu$. Mais, puisque $u\,\overline{\in}\,\mathfrak{F}(p)$, il existe un nombre ordinal α^* tel que $p\,\overline{\in}\,u_{\alpha^*}(p_{\alpha^*})$. Alors, $w\leq u$ veut dire qu'il existe un γ tel que $w_\gamma(q_\gamma)\subseteq u_{\alpha^*}(p_{\alpha^*})$; l'inclusion-ci entraîne $p\,\overline{\in}\,w_\gamma(q_\gamma)$ qui est un absurde. Ainsi, w n'appartient pas à $\mathfrak{F}(p)$, et par conséquent nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $\omega_\mu=\omega_\nu$.

Deuxième cas où $\omega_\mu=\omega_\gamma$ et où il existe une suite partielle α_ξ, $0\leq\xi<\omega_\nu$ telle qu'on ait $p_{\alpha_\xi}=q$ pour tout ξ, $0\leq\xi<\omega_\nu$, q étant un point de R. Alors, q appartient à tous les termes de u. Donc q est distinct de p. Nous pouvons alors appliquer l'axiome T_1 de séparation. Il existe donc un voisinage $V(p)$ de p qui ne possède pas le point q. Mais, comme nous avons déjà vu, il existe, en vertu de la condition (a), une suite fondamentale $v_0(p)\supseteq v_1(p)\supseteq\cdots\supseteq v_\beta(p)\supseteq\cdots$, $0\leq\beta<\omega_\nu$ telle que $v_0(p)\subseteq V(p)$. $\mathfrak{G}$ étant filtrante, il existe alors une suite fondamentale $w=\{w_\gamma(q_\gamma)\}$, $0<\gamma<\omega_\nu$ de $\mathfrak{G}$ telle qu'on ait à la fois $w\leq u$ et $w\leq v$. Puisque $w\leq v$, il existe, pour $v_0(p)$, un nombre ordinal γ^* tel que $w_{\gamma^*}(q_{\gamma^*})\subseteq v_0(p)\subseteq V(p)$. Donc, on a

$q \bar{\in} w_{\gamma^*}(q_{\gamma^*})$. Par conséquent pour tous les nombres γ, $\gamma \geq \gamma^*$, on a $q \bar{\in} w_\gamma(q_\gamma)$, ou $q_\gamma \neq q$ (pour $\gamma \geq \gamma^*$).

Puisque $u \bar{\in} \mathfrak{F}(p)$, il existe un nombre ordinal α^* tel que $p \bar{\in} u_{\alpha^*}(p_{\alpha^*})$. Il existe alors un ξ^* tel que $\alpha_{\xi^*} \geq \alpha^*$. Par conséquent, on a $p \bar{\in} u_{\alpha_{\xi^*}}(p_{\alpha_{\xi^*}})$ et $p_{\alpha_{\xi^*}} = q$. Soit η le rang de $u_{\alpha_{\xi^*}}(p_{\alpha_{\xi^*}})$. Mais d'autre part puisque $w \leq u$, il existe, pour $u_{\alpha_{\xi^*}}(p_{\alpha_{\xi^*}})$ un nombre ordinal γ^{**} tel que $w_{\gamma^{**}}(q_{\gamma^{**}}) \subseteq u_{\alpha_{\xi^*}}(p_{\alpha_{\xi^*}})$. Puisque $\{w_\gamma(q_\gamma)\}$ est une suite fondamentale, il existe deux nombres ordinaux γ_1 et γ_2 tels que $\max(\gamma^*, \gamma^{**}) \leq \gamma_1 < \gamma_2$, $q_{\gamma_1} = q_{\gamma_2}$ et qu'on ait $w_{\gamma_1}(q_{\gamma_1}) \in \mathfrak{V}_{\eta_1}$, $w_{\gamma_2}(q_{\gamma_2}) \in \mathfrak{V}_{\eta_2}$, $\eta \leq \eta_1 < \eta_2$ avec $p \bar{\in} u_{\alpha_{\xi^*}}(q)$. Alors, nous pouvons appliquer l'axiome (b). Il existe donc un voisinage $W(p)$ de p qui est disjoint de $w_{\gamma_2}(q_{\gamma_2})$. Mais d'autre part, comme nous avons vu, en vertu de la condition (a) il existe une suite fondamentale $v' : v_0'(p) \supseteq v_1'(p) \supseteq \cdots \supseteq v_\beta'(p) \supseteq \cdots$, $0 \leq \beta < \omega_\nu$ telle que $v_0'(p) \subseteq W(p)$. Puisque $v' \in \mathfrak{F}(p)$, on a $v' \in \mathfrak{G}$. Or, $v' \bar{\in} \mathfrak{G}$ et $w \in \mathfrak{G}$ veulent dire qu'il existe une suite fondamentale $w' = \{w_\gamma'(q_\gamma)\}$, $0 \leq \gamma < \omega_\nu$ qui satisfait à la fois à $w' \leq v'$ et $w' \leq w$. Ceci est absurde; en effet, pour $v_0'(p)$, il existe un nombre ordinal γ_0 tel que $\gamma > \gamma_0$ entraîne $w_\gamma'(q_\gamma') \subseteq v_0'(p)$, c.-à-d.

$$w_\gamma'(q_\gamma') \cap w_{\gamma_2}(q_{\gamma_2}) = 0. \tag{1}$$

D'autre part, $w' \leq w$ veut dire qu'il existe, pour $w_{\gamma_2}(q_{\gamma_2})$, un nombre ordinal γ_0' tel que $\gamma > \gamma_0'$ entraîne

$$w_\gamma'(q_\gamma') \subseteq w_{\gamma_2}(q_{\gamma_2}). \tag{2}$$

(1) et (2) sont évidemment contradictoires pour $\gamma \geq \max(\gamma_0, \gamma_0')$.

Troisième cas où $\omega_\mu = \omega_\nu$ et où, pour tout nombre ordinal α, il existe un nombre ordinal $\zeta = \zeta(\alpha) > \alpha$ tel qu'on a $p_\xi \neq p_\alpha$ dès que $\xi > \zeta$. Puisque $u \bar{\in} \mathfrak{F}(p)$, il existe un nombre ordinal α^* tel que $p \bar{\in} u_{\alpha^*}(p_*)$. Mais, vu la supposition, il existe un nombre $\zeta = \zeta(\alpha^*)$ tel que $\xi > \zeta$ entraîne $p_\xi \neq p_{\alpha^*}$. Posons $q = p_{\alpha^*}$. Puisque $p \in u_{\alpha^*}(p_{\alpha^*})$, on a $p \neq q$. Alors, en vertu de l'axiome T_1, il existe un voisinage $V(p)$ de p qui ne possède pas le point q. Soit η le rang du voisinage $u_{\alpha^*}(p_{\alpha^*})$. Puisque u est une suite fondamentale, il existe un nombre ordinal ξ_1 et ξ_2 tels que $\max(\zeta, \alpha^*) < \xi_1 < \xi_2$, $u_{\xi_1}(p_{\xi_1}) \in \mathfrak{V}_{\eta_1}$, $u_{\xi_2}(p_{\xi_2}) \in \mathfrak{V}_{\eta_2}$, $\eta \leq \eta_1 < \eta_2$, $p_{\xi_1} = p_{\xi_2}$. Or, $\alpha^* < \xi_1 < \xi_2$ entraîne $u_{\xi_2}(p_{\xi_2}) \subseteq u_{\xi_1}(p_{\xi_1}) \subseteq u_{\alpha^*}(q)$ et $p \in u_{\alpha^*}(q)$. D'autre part, $\zeta < \xi_1 < \xi_2$ entraîne $p_{\xi_1} = p_{\xi_2} \neq q$. Donc, en vertu de l'axiome (b), il existe un voisinage $W(p)$ de p qui est disjoint de $u_{\xi_2}(p_{\xi_2})$. À partir de cette conséquence, nous pouvons raisonner de la même manière que le deuxième cas pour aboutir à une contradiction.

Ainsi, dans tous les cas, nous sommes emmenés à un absurde et cela signifie que $\mathfrak{F}(p)$ est une collection maximale. $\mathfrak{F}(p)$ appartient donc à S. Désignons par R^* l'ensemble de tous les points $\mathfrak{F}(p)$ dans S. On a donc $R^* \subseteq S$.

2. Nous démontrons maintenant $\mathfrak{F}(p)$ *fournit une application*

homéomorphe de R en R^*.

1) $\mathfrak{F}(p)$ *est une application biunivoque.* Soient, en effet, p, q deux points distincts de R. En vertu de l'axiome T_1 de séparation, il existe alors un voisinage $u(p)$ de p qui ne contient pas le point q. D'autre part, il existe, comme nous avons déjà vu, une suite fondamentale des voisinages de $p: u=\{u_\alpha(p)\}$, $0\leq\alpha<\omega_\nu$, telle que $u_0(p)\subseteq u(p)$. u appartient à $\mathfrak{F}(p)$, mais n'appartient pas à $\mathfrak{F}(q)$. Donc $\mathfrak{F}(p)\neq\mathfrak{F}(q)$.

2) $\mathfrak{F}(p)$ *est continue.* Posons $p^*=\mathfrak{F}(p)$ et soit $W_\alpha(V, p^*)$ un voisinage quelconque de p^* dans S, V étant une coordinnée de p^*. Il existe donc une suite fondamentale $u=\{u_\alpha(p)\}$, $0\leq\alpha<\omega_\mu$ des voisinages de p telle que $u_0(p)=V$. V contient donc le point p. Pour α et V, la condition (a) veut dire qu'il existe un voisinage $w(p)$ de p du rang β supérieur à α et qui est contenu dans V. Je dis que $\mathfrak{F}(q)$ *appartient à* $W_\alpha(V, p^*)$ *dès que* $q\in w(p)$. En effet, $q\in w(p)$ nous permet de considérer $w(p)$ comme un voisinage de q. Donc, vu la condition (a), il existe un voisinage $v(q)$ de q tel que $v(q)\subseteq w(p)$, $v(q)\in\mathfrak{V}_\gamma$. $v(q)$ étant une coordinnée de $\mathfrak{F}(q)$, posons $v(q)=D$. Ainsi, nous avons β et D tels que, pour toute coordinnée C de p^* il existe un point x qu'on peut supposer $x=p$, et un voisinage $v(x)=w(p)$ qui satisfait à $D\subseteq v(x)\subseteq V$, $v(x)\in\mathfrak{V}_\beta$, $\beta>\alpha$. Cela veut dire $\mathfrak{F}(q)\in W_\alpha(V, p^*)$.

3) $\mathfrak{F}^{-1}(p)$ *est continue.* Soit $p^*=\mathfrak{F}(p)$ un point quelconque de R^* et $u(p)$ un voisinage quelconque du point $p=\mathfrak{F}^{-1}(p^*)$. Il existe alors une suite fondamentale $u=\{u_\alpha(p)\}$ de voisinages de p telle que $u_0(p)\subseteq u(p)$. Posons $V=u_0(p)$, $u_0(p)\in\mathfrak{V}_{\gamma_0}$, $\beta=\gamma_0$, et considérons le voisinage $W_\beta(V, p^*)$ de p^*. Nous allons montrer qu'on aura $q\in u(p)$ dès que $\mathfrak{F}(q)\in W_\beta(V, p^*)$. En effet, $\mathfrak{F}(q)\in W_\beta(V, p^*)$, $\mathfrak{F}(q)\neq p^*$ veut dire qu'il existe un rang μ et une coordonnée D tels que, pour toute coordonnée C de p^*, il existe un point x de C et un voisinage $V(x)$ de x satisfaisant à $D\subseteq V(x)\subseteq V$, $V(x)\in\mathfrak{V}_\gamma$, $\beta\leq\gamma$. D étant une coordonnée de $q^*=\mathfrak{F}(q)$, on a $q\in D$. D'autre part, nous avons $D\subseteq V(x)$ $\subseteq V=v_0(p)\subseteq u(p)$, c.-à-d. $q\in u(p)$. Il nous reste à examiner le cas où $\mathfrak{F}(q)=p^*$. Dans ce cas, nous avons déjà vu qu'on a $q=p$. Donc $q\in u(p)$.

3. Désignons par S^* la somme de R^* et l'ensemble de tous les points non isolés de S. Nous allons démontrer que R^* *est partout dense dans* S^*. Pour cela, soit p^* un point quelconque de S^* et $W_\alpha(V, p^*)$ un voisinage quelconque de p^*, et montrons qu'il existe au moins un point q^* de R^* contenu dans $W_\alpha(V, p^*)$. Or, puisque V est une coordonnée de p^*, il existe une suite fondamentale $v_0(p_0)\supseteq v_1(p_1)\supseteq\cdots\supseteq v_\beta(p_\beta)\supseteq\cdots$, $0\leq\beta<\omega_\mu$ telle que $V=v_0(p_0)$. Posons $v_\beta(p_\beta)\in\mathfrak{V}_\beta$.

Remarque. On sera tenté de considérer qu'il existe un β tel que $\mathfrak{F}(p_\beta)$ appartient à $W_\alpha(V, p^*)$. Mais, il faut remarquer que ce n'est pas vrai en générale. En effet, considérons Exemple 4 (II, 4) et soit ξ un nombre irrationnel quelconque. Par approximation successive au moyen de la fraction continue, on a une suite des nombres rationnels: $x_0, x_1, x_2, \dots$ tels que

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < \xi < \cdots < x_5 < x_3 < x_1$$

$$x_n = P_n/Q_n,\ |\xi - x_n| < (1/Q_n)^2,\ Q_0 < Q_1 < Q_2 < \cdots\ .$$

Posons $\gamma_n = Q_n Q_{n-1},\ p_0 = x_0,\ p_{2n} = p_{2n-1} = x_{2n} (n=1, 2, \dots),$

$$v_{2n}(p_{2n}) = \underset{x}{E}(x_{2n} \leq x < x_{2n} + 1/\gamma_{2n}),\ n=0, 1, 2, \dots$$

$$v_{2n-1}(p_{2n-1}) = \underset{x}{E}(x_{2n} \leq x < x_{2n} + 1/\gamma_{2n-1}),\ n=1, 2, \dots$$

où x désignent les nombres rationnels.[1]

Dans ce cas, $\{v_n(p_n)\}$, $n=0, 1, 2, \dots$ forment une suite fondamentale des voisinages dans R. Posons $p^* = \xi$; alors, on voit bien que p_n (qui sont tous inférieurs à ξ) n'appartient à $W_\alpha(V, \xi)$ pour aucun n, puisque $p_n^* \in W_\alpha(V, \xi)$ entraînerait $p_n^* \geq \xi$.

Revenons à la démonstration et supposons que $p^* \bar{\in} R^*$. Puisque p^* n'est pas isolé, il existe un point q^* qui appartient à $W_\alpha(V, \xi)$. Donc, il existe un rang μ $(0 \leq \mu < \omega_\nu)$ et une coordonnée D de q^* tels que pour toute coordonnée C de p^* il existe un point x de C et un voisinage $v(x)$ de x satisfaisant à $D \subseteq v(x) \subseteq V$, $v(x) \in \mathfrak{B}_\mu$, $\alpha \leq \mu$.

D étant une coordonnée de q^*, il existe une suite fondamentale $u = \{u_\beta(q_\beta)\}$, $0 \leq \beta < \omega_\mu$ dont le premier terme $u_0(q_0)$ coïncide avec D. Posons $q_\beta^* = \mathfrak{F}(q_\beta)$. Alors, comme nous avons déjà vu, $D = u_0(q_0)$ est une coordonnée de q_β^*. Alors, d'après la définition elle-même, q_β^* appartient à $W_\alpha(V, p^*)$. Donc, R^* est partout dense dans S^*.

Enfin, remarquons que S peut avoir des points isolés qui n'appartiennent pas à R^*.

Exemple 6. Considérons l'ensemble S de tous les points x de l'espace N_+ qui satisfont à l'inégalité: $x \leq \xi$, ξ étant un nombre irrationnel quelconque, mais donné d'avance. Désignons par R l'ensemble de tous les nombres rationnels contenus dans S. La topologie de S (et de R) sera identique à celle de l'Exemple 4 (mais considérée relativement à S $(S \subset N_+)$).

En complétant R, on obtient S. Mais, dans ce cas, ξ est un point isolé de S et ξ n'appartient pas à R^*. (à suivre)

1) $\underset{x}{E}(P(x))$ désigne l'ensemble de tous les points x qui satisfont à la condition $P(x)$.