78. *Fonctions Presque Pêriodiques du Type Spêcial.* V

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 13, 1955)

§ 11. *Rapport entre les trois espaces* $\mathfrak{A}^s$, $\mathfrak{A}^0$, *et* $\mathfrak{A}$. Étant donné un espace vectoriel uniforme $\mathfrak{L}$, on notera $C(G,\mathfrak{L})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}_b^G$ formé des applications continues de G dans $\mathfrak{L}$. On a alors le

Théorème 21. $\mathfrak{A}(G)(\mathfrak{A}^1(G))$ *est fermé dans* $C(G,\mathfrak{M})$ (*resp.* $C(G,\mathfrak{M}^1)$) *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Remarque — Nous signalons ici expressément que, ce qui n'y aurait pas à revenir comme nous ne nous intéressons qu'un groupe topologique (*l. c.*), $\mathfrak{A}(G)$ (ou $\mathfrak{A}^1(G)$) se forme des fonctions continues dans $\mathfrak{M}_b^G$ (resp. $\mathfrak{M}_b^{1G}$); lorsqu'on parlait de ces espaces (dans Notes précédantes [I]$\sim$[IV]),[1] il était toujours sous-etendu ce fait.

La démonstration du Théorème sera facile, donc dispensée.

En munissant $C(G,\mathfrak{M})$ de la *topologie de la convergence simple* (ou *compacte*), on le note par $C^s(G,\mathfrak{M})$ (resp. $C^0(G,\mathfrak{M})$) et définit l'espaces des fonctions presque périodiques à gauche, noté $\mathfrak{A}^s(G)$ (resp. $\mathfrak{A}^0(G)$), dans $C^s(G,\mathfrak{M})$ (resp. $C^0(G,\mathfrak{M})$). En général, $\mathfrak{A}^s(G)$ et $\mathfrak{A}^0(G)$ ne sont plus fermés. Le Lemme suivant découle aussitôt de la définition elle-même:

Lemme 4. *Pour que* $\alpha \in C(G,\mathfrak{M})$ *soit p. p. dans* $C^s(G,\mathfrak{M})$ (*c'est-à-dire,* $\in \mathfrak{A}^s(G)$), *il faut et il suffit que l'ensemble* $\mathrm{H} \equiv \{\alpha(x)\}_{x\in G}$ *soit relativement compact* (*r. c.*) *dans* $\mathfrak{M}$ *muni de la topologie vague. Comme* $L^0(V_0)$ *est un espace "tonnelé",*[2] *cette dernière condition est équivalente à chacune des propriétés mutuellemment équivalentes qui vont suivre;*[3]

i) H *est faiblement borné,*

ii) H *est fortement borné* (*relativement à chaque partie bornée dans l'espace* $L^0(V_0)$),

iii) H *est un ensemble équicontinu.*

Ainsi, on voit que la presque-périodicité à gauche dans $\mathfrak{A}^s(G)$, de même que dans $\mathfrak{A}(G)$ et $\mathfrak{A}^1(G)$, entraîne celle à droite.

Lemme 5. *Toute fonction de* $\mathfrak{A}^0(G)$, $\mathfrak{A}(G)$, *ou* $\mathfrak{A}^1(G)$ *est unifor-*

---

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial. I, II, III, IV,* Proc. Japan Acad., **31** (1955).

2) N. Bourbaki [3]: *Sur certains espaces vectoriels topologiques,* Ann. de l'Inst. Fourier, **2**, 5-16 (1950).

3) En ce qui concerne l'équivalence entre ceux-ci, N. Bourbaki [1]: *Intégration,* Act. Sci. et Ind., Paris, 62 (1952). R. E. Edwards: *A theory of Radon mesure on locally compact spaces,* Acta Math., **88**, 133-164 (1952).

mément continue sur G pour la structure uniforme gauche.

Démonstration. Il suffit, d'après la relation d'inclusion évidente

(11.1) $$\mathfrak{A}^1(G) \subset \mathfrak{A}(G) \subset \mathfrak{A}^0(G),$$

de prouver que toute $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$ est ainsi.[4] Étant donné un voisinage ω_0 de 0 dans $\mathfrak{M}$, supposons que ω soit un voisinage de 0 tel qu'on ait $\omega+\omega+\omega \subset \omega_0$; d'autre part, soit U un voisinage compact quelconque de e dans G, alors il existe par hypothèse n éléments $a_1, \dots, a_n \in G$ tels qu'on puisse choisir, pour tout $a \in G$, un a_i d'entre eux qui vérifie, $\tau_a\alpha(\cdot)$ étant $=\alpha(a^{-1}\cdot)$,

(11.2) $$\tau_a\alpha(x) - \tau_{a_i}\alpha(x) \in \omega, \qquad \text{quel que soit } x \in \overline{U},$$

donc en particulier, ($\sharp$) $\tau_a\alpha(e) - \tau_{a_i}\alpha(e) \in \omega$. Soit encore V un voisinage de e tel qu'on ait, quel que soit $x \in V$, ($\sharp\sharp$) $\tau_{a_i}\alpha(x) - \tau_{a_i}\alpha(e) \in \omega$ pour tout i, $1 \leqq i \leqq n$, et prenons un voisinage symétrique W de e, vérifiant $W \subset U \frown V$; en combinant (11.2), ($\sharp$), et ($\sharp\sharp$), on en conclut alors que $\tau_a\alpha(x) - \tau_a\alpha(e) \subset \omega+\omega+\omega \subset \omega_0$ pour tout $x \in W$ et tout $a \in G$, ce qui démontre notre assertion.†

Théorème 22. *Pour qu'une application α dans $C(G, \mathfrak{M})$ soit presque périodique à gauche dans $C^0(G, \mathfrak{M})$ (c'est-à-dire, $\in \mathfrak{A}^0(G)$), il faut et il suffit que $\alpha \in \mathfrak{A}^s(G)$ et que α soit uniformément continue sur G pour sa structure uniforme gauche.*

La topologie de $C^0(G, \mathfrak{M})$ étant plus fine que celle de $C^s(G, \mathfrak{M})$, si α est *p. p.* pour celle-là, il en est ainsi pour celle-ci, d'où la nécessité en tenant compte du Lemme 5. Réciproquement, montrons que les conditions sont suffisantes. Supposons-les en effet vérifiées; alors on voit d'abord que l'ensemble $\mathfrak{T}_\alpha$ des translatées $\tau_a\alpha$ de α, pour tout $a \in G$, est *équicontinu* sur G. C'est une conséquence immédiate de la continuité uniforme de α. Par ailleurs, comme $\alpha \in \mathfrak{A}^s(G)$, l'ensemble $\mathfrak{T}_\alpha(x) \equiv \{\tau_a\alpha(x)\}_{a \in G}$ est *r. c.* dans $\mathfrak{M}$ pour tout $x \in G$. Cela étant, le "*théorème d'Ascoli*" est applicable,[5] c'est-à-dire $\mathfrak{T}_\alpha$ est aussi *r. c.* dans $C^0(G, \mathfrak{M})$, ce qui achève la démonstration.†

Or, $\mathfrak{A}^0(G)$ n'est pas fermé dans $C^0(G, \mathfrak{M})$, mais on voit aisément:

Théorème 23. *$\mathfrak{A}^0(G)$ est fermé dans $C(G, \mathfrak{M})$, (pour la topologie de la convergence uniforme). Alors $\mathfrak{A}(G)$ est un sous-espace fermé de $\mathfrak{A}^0(G)$, qui n'est pas dense dans celui-ci sans que G soit compact.*

Au moyen de la façon analogue tout à fait à la démonstration du Lemme 5, la première partie en facilement résulte; pour démontrer la dernière, on n'a qu'à prendre une telle fonction que soit $\in \mathfrak{A}^0(G)$

4) L'assertion qui concerne $\mathfrak{A}^1(G)$ sera déduite sans peine de la continuité uniforme des représentations continues de G.

5) N. Bourbaki [4]: *Topologie générale*, Chap. X, Act. Sci. et Ind., Paris, 43 (1949).

† Nous nous bornons ici à n'écrire les assertions que pour la structure uniforme gauche; les façons tout analogues vont bien pour la structure uniforme droite et la presque-périodicité à droite.

mais non $\in \mathfrak{A}(G)$, *p. ex.* $\alpha(x)=f(x)d\mu$ où $f\in L^0(G)$ (cf. Théorème 1).

Corollaire 1. *Pour que G soit compact, il faut et suffit que $\mathfrak{A}^s(G)$ coïncide avec $\mathfrak{A}(G)$.*

Corollaire 2. *Si G est abélien, $\alpha(x)=\chi(x)d\chi$ appartient à $\mathfrak{A}^0(G)$, et si en outre et seulement si G est compact, elle appartient à $\mathfrak{A}(G)$* (répétition du Corollaire de Théorème 1 [I]).

En effet, si G n'est pas compact, cette $\alpha(x)$ est évidemment $\in \mathfrak{A}(G)$; pour cela, supposons que $\alpha\in\mathfrak{A}(G)$ et considérons la transformée de Fourier d'une $\hat{g}\in L^0(\hat{G})$, alors on aura $\int_{\hat{G}}\hat{g}(\chi)\chi(x)d\chi$ $=\langle\hat{g},\alpha\rangle(x)\in A(G)$ (d'après Théorème 1) et simultanément $\in L_\infty(G)$, ce qui est absurde.

§ 12. Comme dans Cor. 2 ci-dessus, si G est abélien, $\alpha(x)=\chi(x)d\chi$ et, de même raisonnement, $\alpha_\mu(x)=\chi(x)d\mu$ où $\mu\in\mathfrak{M}$ appartiennent à $\mathfrak{A}^0(G)$; plus généralement, on a

Théorème 24. *Soit $u(x,\varphi)$ une fonction numérique mesurable et bornée sur le produit tensoriel $G\times V_0$; alors la fonction produite $\alpha_u(x)$ $=u(x,\varphi)\alpha_{(x)}(\varphi)$ d'une $\alpha\in\mathfrak{A}^s(G)$ est aussi $\in\mathfrak{A}^s(G)$. Si en outre $u(x,\varphi)$ est uniformément continue à gauche sur G, le produit $\alpha_u(x)=u(x,\varphi)d\mu$ d'une $\mu\in\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{A}^0(G)$, p. ex. pour toute $f\in L^1(G)$, $\alpha_f(x)=\hat{f}_x(\varphi)d\mu$ est dans $\mathfrak{A}^0(G)$.*

Lorsque G est abélien, le cas où nous sommes notamment intéressants est celui où $u(x,\chi)=\chi(x)$ ou bien$=\chi^{-1}(x)$. Dans ce qui suit, on considère exclusivement un groupe (*l. c.*) abélien et étudie quelques rapports entre l'espace $\mathfrak{A}^0(G)$ et celui des fonctions faiblement presque périodiques, la notion desquelles a été introduite par M. W. F. Eberlein en concernant le théorème "ergodique abstrait".[6]

Or, l'application $a\in G\to f_a(f\in L^1(G))$ définit une représentation fortement continue $U_a\hat{g}(\hat{g}\in L_\infty(\hat{G}))$ sur l'espace de Banach $L_\infty(\hat{G})$, jouissante des propriétés suivantes: i) $U_a\hat{f}=\hat{f}_a=\chi(a)\hat{f}$ (pour la transformée de Fourier $\hat{f}$ de $f\in L^1(G)$), ii) $\|U_a\hat{g}\|=\|\hat{g}\|$ (isométrique).

Comme $\alpha_\mu(x)=\chi(x)d\mu$ appartient à $\mathfrak{A}^0(G)$, pour toute $\mu\in\mathfrak{M}^1$ et toute $\hat{f}\in L_\infty(\hat{G})$, *dual à* $\mathfrak{M}^1$, les valeurs

$$\mu(U_a\hat{f})=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\chi)\chi(x)d\mu=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\chi)d\alpha_{(x)}(\chi) \tag{12.1}$$

sont relativement compactes quand a décrit G,[7] d'où résulte

6) W. F. Eberlein: *Abstract ergodic theorem and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 217–240 (1949) et *Decomposition of weak almost periodic functions* (abstraction), Bull. Amer. Math. Soc., **56**, 4 (1950).

7) Les Lemme 4, Théorèmes 22, et 23 s'étendent de même aux mesures bornées; en remplaçant $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}^0(G)$, $\mathfrak{A}^s(G)$ par $\mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{A}^0(G)\cap C(G,\mathfrak{M}^1)$, $\mathfrak{A}^s(G)\cap C(G,\mathfrak{M}^1)$ respectivement, ceux reviennent au vrai.

Théorème 25. *1) Pour $\alpha_\mu(x)=\chi(x)d\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}^1$, la valeur $\langle \hat{f}, \alpha_\mu \rangle(x)$ est faiblement presque périodique (f. p. p.) sur G, au sens de M. W. F. Eberlein; 2) si $\mu \in \mathfrak{M}$ est à support compact, $\psi_\mu(x)=\int_{\hat{G}} d\alpha_{\mu(x)}(\chi)$ est f. p. p. sur G.*

On déduit du Théorème 25 que:[8]

a) *Si $f \in P(G)$ (de type positif) ou $\in \Pi(G)$, elle est f. p. p.*; en effet, rappelons l'égalité (9.1) et le filtre $\mathfrak{F}_G$ défini dans § 9, alors pour $\alpha_f(x)=\chi(x)d\mu_f$ où μ_f est la mesure $\in \mathfrak{M}^1$ associée à $f \in P(G)$ dans (9.1), d'après 1) du Théorème 25, la fonction $\langle \hat{g}^\lambda, \alpha_f \rangle(x)$ est *f. p. p.*, quel que soit $g^\lambda \in \mathfrak{F}_G$. D'autre part, on a $\langle \hat{g}^\lambda, \alpha_f \rangle(x)=\int_G g^\lambda(xt)f(t)dt$ (d'après (9.1)), dont $\langle \hat{g}^\lambda, \alpha_f \rangle(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ avec λ sur G, car $g^\lambda(xt)dt$ converge vers la masse $+1$ placée en $x \in G$ pour la topologie *étroite*.

b) *Si $f \in A(G)$, elle est f. p. p.*; en posant $\alpha_{\chi_0}(x)=d\varepsilon_{\chi_0}$, $\chi_0 \in \hat{G}$, on voit que $\chi_0(x)=\langle \hat{g}, \alpha_{\chi_0} \rangle(x)$ est *f. p. p.* pour une $\hat{g} \in L^0(\hat{G})$ telle que $\hat{g}(\chi_0)=1$, d'où résulte l'assertion.

c) *Si $f \in L_\infty(G)$ et, par suite, $\in L^0(G)$, elle est f. p. p.*; en posant $d\mu=\hat{f}(\chi)d\chi$ pour une $\hat{f} \in L^0(\hat{G})$, on voit que $\mu \in \mathfrak{M}^1$ et, d'après 2) du Théorème 25, $\psi_\mu(x)$ est *f. p. p.*, qui n'est autre que la transformée de Fourier de $\hat{f}$, donc $\psi_\mu(x) \in L_\infty(G)$. Toute fonction de $L_\infty(G)$ est limite uniforme de ces $\psi_\mu(x)$ quand $\hat{f}$ décrit $L^0(\hat{G})$, d'où résulte l'assertion.

Remarque 1. Dans les trois démonstrations ci-dessus *a*), *b*), et *c*), on a conclu en s'appuyant au fait que la limite uniforme de fonctions *f. p. p.* est aussi *f. p. p.* (ce qui est aisément prouvé).

Remarque 2. Comme dans l'espace $C^0(G, \mathfrak{M})$, on peut naturellement construire sur l'espace des fonctions numériques continues $C(G)$, la topologie de la convergence compacte et définier fonctions continues *p. p.* pour cette topologie; on notera $A^0(G)$ l'espace des fonctions ainsi définies et $W(A)$ celui des fonctions *f. p. p.* au sens de M. Eberlein. On a alors;

$$A(G) \subset W(A) \subset A^0(G), \tag{12.2}$$

et $W(A)$ est partout dense dans $A^0(G)$ (pour la topologie de la convergence compacte); toutefois, *$A^0(G)$ n'est au fait autre que l'espace des fonctions uniformément continues sur G*, ainsi nous ne sommes de rien à la presque-périodicité pour la topologie de convergence compacte dans les fonctions numériques (contrairement à ce qui lieu dans $\mathfrak{A}^0(G)$).

8) Les assertions a) et c) sont Théorèmes 11.1 et 11.2 de W. F. Eberlein: *Loc. cit.*, respectivement.

Par contre, la topologie de convergence compacte dans l'espace $A(G)$ est assez importante; *cf.* S. Matsushita [2].

§ 13. Soit G encore un groupe *l. c.* abélien; alors le même principe de démonstration de l'existence de moyennes sur l'espace vectoriel des fonctions numériques continues et bornées sur G[9] peut être employé pour prouver que chaque $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$ admet la valeur moyenne $m^0[\alpha]$ qui coïnciderait avec $m[\alpha]$ tant que $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$.

Avant de prouver ceci, nous remarquons d'abord l'espace $C^0(G, \mathfrak{M})$ lui-même est considéré comme un espace vectoriel topologique *sur le corps des nombres réels*, noté $C^0_R(G, \mathfrak{M})$, *sous-jacent à* $C^0(G, \mathfrak{M})$ du sens propre (c'est-à-dire, sur le corps complexe); $\mathfrak{A}^0(G)$ est alors une variété linéaire par rapport au corps réel, noté $\mathfrak{A}^0_R(G)$, dans $C^0_R(G, \mathfrak{M})$.

Or, soit $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$, l'ensemble des translatées $\mathfrak{T}_\alpha \equiv \{\tau_a \alpha\}_{a \in G}$ est équicontinue dans $C(G, \mathfrak{M})$ par définition, donc l'enveloppe convexe $\mathfrak{K}_\alpha$ de $\mathfrak{T}_\alpha$ est aussi équicontinue[10] et l'adhérence $\overline{\mathfrak{K}}_\alpha$ est compact dans $C^0(G, \mathfrak{M})$ aussi bien dans $C^0_R(G, \mathfrak{M})$; celui-ci est une conséquence du Théorème d'Ascoli. Désignons par Γ l'ensemble de toutes les translations τ_a, $a \in G$, sur $\mathfrak{A}^0_R(G)$, alors toute $\tau_a \in \Gamma$ est une application linéaire affine de $\mathfrak{A}^0_R(G)$ dans lui-même, deux à deux permutable, qui est encore un automorphisme continue sur $\overline{\mathfrak{K}}_\alpha$.

Alors, en vertu du Théorème de MM. A. Markoff et S. Kakutani, *sur les points fixes*, N. Bourbaki [2], il existe un point fixe, noté $m^0[\alpha]$, de $\overline{\mathfrak{K}}_\alpha$ qui est invariant pour toute τ_a de Γ, autrement dit, *invariant par les translations de G.* $m^0[\alpha]$ est alors une constant sur G, c'est-à-dire une mesure de $\mathfrak{M}$. Cette valeur s'appelle la *valeur moyenne de* $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$.

§ 14. *Propriétés de la moyenne* $m^0[\alpha]$. La valeur $m^0[\alpha]$ est bien caractérisée par le fait: quels que soient un voisinage ω de 0 dans $\mathfrak{M}$ et un compact $K \subset G$, il y a un nombre fini de $s_1, \ldots, s_l \in G$ et l nombres positifs $\eta_1, \ldots, \eta_l$ avec $\sum_{j=1}^l \eta_j = 1$, tels qu'on ait

$$(14.1) \qquad m^0[\alpha] - \sum_{j=1}^l \eta_j \alpha(s_j x) \subset \omega,$$

pour tout $x \in K$.

Avec les mêmes notations que dans le Théorème 4 [II], pour toute $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$, la relation (4.1) est valide; c'est-à-dire

$$(14.2) \qquad m[\alpha] - \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha(a_i y) \subset \omega$$

9) Voir l'Exemple dans Appendice, p. 115, de N. Bourbaki [2]: *Espaces vectoriels topologiques*, Livre 5 (1953).

10) Étant donné un voisinage de 0, $\omega = \omega_0(\hat{f}; \varepsilon)$ où $\hat{f} \in L^0(V_0)$ et $\varepsilon > 0$ et supposons que $\alpha(x) - \alpha(x_0) \in \omega$ pour tout x tel que $xx_0^{-1} \in U$ (un voisinage de e); alors en posant $\beta = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \tau_{a_i} \alpha$, on a

$$|\langle \hat{f}, \beta \rangle(x) - \langle \hat{f}, \beta \rangle(x_0)| \leqq \sum_{i=1}^n \xi_i |\langle \hat{f}, \alpha \rangle(a_i x) - \langle \hat{f}, \alpha \rangle(a_i x_0)| < \varepsilon$$

pour tout $x \in U x_0$.

pour tout $y \in G$. Posons maintenant $K = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$ et appliquons (14.1), alors on a $m^0[\alpha] - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{l} \eta_j \alpha(s_j a_i) \subset \omega$ et, d'après (14.2), $m[\alpha] - \sum_{j=1}^{l} \eta_j \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha(a_i s_j) \subset \omega$. D'où il vient que $m[\alpha] = m^0[\alpha]$.

En résumé, nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 26. *Pour toute* $\alpha \in \mathfrak{A}^0(G)$, *il existe une mesure* $m^0[\alpha]$ *de* $\mathfrak{M}$, *vérifiant* (*14.1*) *ci-dessus et*

(14.3) $$m^0[\alpha] = m^0[\tau_a \alpha], \qquad \textit{pour tout } a \in G.$$

De plus, si $\alpha \in \mathfrak{A}(G)$, $m^0[\alpha]$ *est uniquement déterminée et identique à la valeur moyenne propre* $m[\alpha]$.

(*à suivre*)