92. *Sur l'Existence des Solutions des Équations Différentielles Ordinaires*

Par Masuo HUKUHARA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1955)

1. Position du problème. Soit donnée une équation différentielle

$$\vec{y}'=\vec{f}(x, \vec{y}), \tag{1}$$

dont le second membre est continu dans $\mathfrak{D}$. M. M. Nagumo a appelé ensemble permettant à droite (gauche) un ensemble E tel qu'il existe dans E une courbe solution issue à droite (gauche) d'un point quelconque de E. Nous avons donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble de D fermé dans lui soit permettant à droite.[1] Nous voulons étendre ce résultat au cas où $\vec{f}(x, \vec{y})$ est continue par rapport à $\vec{y}$ et mesurable par rapport à x.

2. Hypothèses. Supposons les hypothèses suivantes remplies:

(i) $\vec{f}(x, \vec{y})$ est continue par rapport à $\vec{y}$;

(ii) $\vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$ est mesurable quelle que soit la fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ telle que $(x, \vec{\varphi}(x)) \in \mathfrak{D}$;

(iii) $\vec{f}(x, \vec{y})$ est également sommable par rapport à x en chaque point de $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire on peut faire correspondre à chaque point $(a, \vec{b})$ de $\mathfrak{D}$ un voisinage $U(a, \vec{b})$ et une fonction sommable $F(x, a, \vec{b})$ définie dans un voisinage de a de manière que l'on ait

$$|\vec{f}(x, \vec{y})| \leqq F(x, a, \vec{b})$$

dans $U(a, \vec{b})$.

Une fonction continue $\vec{\varphi}(x)$ est dite une solution si l'on a

$$\vec{\varphi}(x)=\vec{\varphi}(a)+\int_a^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))\, dx, \tag{2}$$

la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ appartenant à $\mathfrak{D}$. Il est clair que cette définition est indépendante de la choix de la valeur a.

3. Topologies droite et gauche. Un ensemble majorant à droite (gauche) dans D est un ensemble E tel qu'une courbe solution issue à droite (gauche) d'un point quelconque de E et contenue dans D soit contenue dans E.

Cela posé, nous introduisons deux topologies, topologie droite $\mathfrak{T}^+$ et topologie gauche $\mathfrak{T}^-$. La topologie droite $\mathfrak{T}^+$, par exemple, est

1) M. Hukuhara: Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires, I, II, III, Sūbutu Kwaisi, **5**, 325–337 (1931); ibid., **6**, 134–147, 285–295 (1932). M. Nagumo: Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **24**, 551–559 (1942).

définie à l'aide d'un système des voisinages droits que nous définirons dans la suite.

Soit $U(a, \vec{b}, \delta)$ l'ensemble défini par $|x-a|<\delta$, $|\vec{y}-\vec{b}|\leqq\delta$. Nous désignons par $\Phi(x, a, \vec{b}, \delta)$ l'ensemble des valeurs que prennent en x les intégrales

$$\vec{b}+\int_a^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))\, dx,$$

où $\vec{\varphi}(x)$ est une fonction quelconque telle que $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartienne à $\mathfrak{D}\cap U(a, \vec{b}, \delta)$ et que $\vec{f}(x, \vec{\varphi}(x))$ soit mesurable, et par $\Phi(a, \vec{b}, \delta, \varepsilon)$ l'ensemble des $(x, \vec{y})$ tels que $\vec{y}$ est distant de $\Phi(x, a, \vec{b}, \delta)$ au plus de $\varepsilon|x-a|$.

S'il n'existe aucune courbe issue à droite de $(a, \vec{b})$ et contenue dans $\mathfrak{D}$, nous prenons pour le voisinage droit de $(a, \vec{b})$ l'ensemble ne contenant que le point $(a, \vec{b})$. Dans l'autre cas, nous désignons par $V^+(a, \vec{b}, \delta, \varepsilon)$ l'intersection de $\Phi(a, b, \delta, \varepsilon)$ et de l'ensemble $\Omega[a, a+\varepsilon\rangle$: $0\leqq x-a<\varepsilon$, $|\vec{y}|<\infty$, et par $V^+(a, b, \delta)$ un ensemble $V^+(a, \vec{b}, \delta, \varepsilon)$, où ε prend une valeur telle que $V^+(a, \vec{b}, \delta, \varepsilon)$ soit contenu dans $U(a, \vec{b}, \delta)$. Les ensembles $V^+(a, \vec{b}, \delta)$ forment le système fondamental des voisinages droits de $(a, \vec{b})$.

Le système $\mathfrak{V}^+$ des voisinages droits ainsi définis satisfont aux conditions suivantes:

1° Il satisfait aux quatre conditions de Hausdorff;

2° $V^+(a, \vec{b}, \delta)$ est majorant à droite dans $\Omega[a, a+\varepsilon\rangle$.

4. Théorème d'existence. Un ensemble est dit ouvert à droite ou fermé à gauche suivant qu'il est ouvert ou fermé par rapport à la topologie $\mathfrak{T}^+$. On a alors le

Théorème. *Soient D un ensemble ouvert à droite et E un sous-ensemble de D fermé dans D (par rapport à la topologie euclidienne). Pour que E soit un ensemble permettant à droite, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun point isolé de E par rapport à la topologie $\mathfrak{T}^+$. Une courbe solution contenue dans E est prolongeable à droite dans E jusqu'à la frontière de D.*

La dernière partie du théorème signifie ce fait: si une courbe solution $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$, $x\in\langle a, a'\rangle$, contenue dans E, n'est pas prolongeable dans E au delà de $x=a'$, et si, $a_n(<a')$ tendant vers a', $\vec{\varphi}(a_n)$ converge vers $\vec{b}'$, le point $(a', \vec{b}')$ est un point frontière de D.

5. Démonstration. $(a, \vec{b})$ étant un point quelconque de E, on peut trouver un voisinage $V^+(a, \vec{b}, \delta_0)=V^+(a, \vec{b}, \delta_0, \varepsilon_0)$ contenu dans $D\cap U(a, \vec{b})$. δ étant un nombre positif $<\varepsilon_0$, on peut trouver une fonction $\vec{P}(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(i) $\vec{y}=\vec{P}(x)$ représente une ligne polygonale issue à droite de $(a, \vec{b})$ et dont les sommets (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots, N;\ a_0=a, \vec{b}_0=\vec{b})$ appartiennent à E;

(ii) on a

$$a_N \in [a+\varepsilon_0-\delta,\ a+\varepsilon_0\rangle, \tag{3}$$

$$(a_k, \vec{b}_k) \in V^+(a_{k-1}, \vec{b}_{k-1}, \delta). \tag{4}$$

Pour le prouver, on remarque d'abord qu'une suite de points $(a_k, \vec{b}_k) \in E$ $(k=1, 2, \ldots, N)$ satisfaisant aux conditions (4) et à la condition $a_N < a+\varepsilon_0$ appartient à $V^+(a, \vec{b}, \delta_0)$ pourvu que δ soit assez petit. On considère toutes les telles suites. Soit α la borne supérieure de l'ensemble A des nombres a_N. Il suffit de montrer que l'on a $\alpha=a+\varepsilon_0$.

On peut extraire de A une suite $\{\alpha_n\}$ convergeant vers α. Il existe alors une suite de points $(a_{nk}, \vec{b}_{nk})$ tels que

$$(a_{nk}, \vec{b}_{nk}) \in V^+(a_{n,k-1},\ b_{n,k-1}, \delta)$$

pour $k=1, 2, \ldots, N_n$; a_0, a_{N_n} et $\vec{b}_0$ étant égaux à a, α_n et $\vec{b}$. Posons $\vec{\beta}_n=b_{n,N_n}$. On peut supposer que $(\alpha_n, \vec{\beta}_n)$ converge vers un point $(\alpha, \vec{\beta})$. E étant fermé dans D, le point $(\alpha, \vec{\beta})$ appartiendrait, si $\alpha < a+\varepsilon_0$, à l'ensemble E. Il existerait alors un point

$$(\alpha', \vec{\beta}') \in E \cap V^+(\alpha, \vec{\beta}, \delta'),$$

δ' designant un nombre positif $<\delta$. Si n est assez grand, on aurait $(\alpha', \vec{\beta}') \in V^+(\alpha_n, \vec{\beta}_n, \delta)$. Si l'on pose $(a_k, \vec{b}_k)=(a_{nk}, \vec{b}_{nk})$ pour $k=0, 1, \ldots, N_n$ et $N=N_n+1$, $(a_N, \vec{b}_N)=(\alpha', \vec{\beta}')$, les conditions (4) seraient vérifiées. A contiendrait donc le nombre α' plus grand que α contrairement à la définition de α.

Soit $\{\delta_n\}$ une suite convergeant vers 0. L'existence de la fonction $\vec{P}(x)$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) étant assurée, nous désignerons par $\vec{P}_n(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions que nous obtenons en remplaçant δ par δ_n dans (i) et (ii). La suite $\{\vec{P}_n(x)\}$ est normale dans $[a, a+\varepsilon_0\rangle$, car il résulte de

$$|\vec{P}_n(x)-\vec{P}_n(x')| \leqq \int_{x-\delta_n}^{x'+\delta_n} F(x, a, \vec{b})\, dx+\delta_n(x'-x)$$

l'égale continuité de la suite. On peut donc supposer qu'elle converge vers une fonction $\vec{\varphi}(x)$ continue dans $[a, a+\varepsilon_0\rangle$. E étant fermé dans D, la courbe $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ est contenue dans E.

On peut trouver une fonction $\vec{\varphi}_n(x)$ convergeant vers $\vec{\varphi}(x)$ uniformément dans $[a, a+\varepsilon_0\rangle$ et telle que l'on a $(x, \vec{\varphi}_n(x)) \in \mathfrak{D}$ et

$$|\vec{P}_n(x)-\vec{b}-\int_a^x \vec{f}(x, \vec{\varphi}_n(x))\, dx\,| \leqq \delta_n\varepsilon_0.$$

On a par suite (2) dans $[a, a+\varepsilon_0\rangle$.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffit de montrer que si $(a_n, \vec{\varphi}(a_n)) \to (a', \vec{b'}) \in D$, la solution $\vec{\varphi}(x)$ est prolongeable au delà de a'.

E étant fermé dans D, $(a', \vec{b'})$ appartient à E. Soit $\Psi(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$ l'ensemble des $(x, \vec{y})$ tels que $\vec{y}$ est distant de $\Phi(x, a', \vec{b'}, \delta)$ au plus de $\varepsilon'+\varepsilon\,|x-a'|$. Nous donnons à ε et à ε' des valeurs telles que

$$V^-(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon) \subseteqq U(a', \vec{b'}, \delta'), \quad 0<\varepsilon'<\delta-\delta',$$

δ' étant un nombre plus petit que δ.

L'intersection $V^-(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$ de $\Psi(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$ et de $\Omega\langle a'-\varepsilon, a']$ est majorante à gauche dans $\Omega\langle a'-\varepsilon, a']$. Si n est assez grand, $(a_n, \vec{\varphi}(a_n))$ appartient à $V^-(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$. Par suite $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à $V^-(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$ dans l'intervalle $\langle a'-\varepsilon, a_n]$. On en conclut que $(x, \vec{\varphi}(x))$ appartient à $V^-(a', \vec{b'}, \delta, \varepsilon, \varepsilon')$ pour $a'-\varepsilon<x<a'$. ε' pouvant être pris aussi petit que l'on veut, $\vec{\varphi}(x)$ converge vers $\vec{b'}$ lorsque $x\to a'-0$. $(a', \vec{b'})$ appartenant à E, la solution est prolongeable au delà de a'.

6. Corollaire. Nous obtiendrons, comme un corollaire, une extension du théorème d'existence bien connu de M. O. Perron.

Considérons une seule équation

$$y'=f(x, y), \tag{5}$$

dont le second membre est défini dans la région

$$a\leqq x<a', \quad \underline{\omega}(x)\leqq y\leqq \overline{\omega}(x), \tag{6}$$

$\underline{\omega}(x)$ et $\overline{\omega}(x)$ étant des fonctions continues dans l'intervalle $[a, a'\rangle$. Nous supposons de plus les conditions suivantes remplies:

(i) $f(x, y)$ est continue par rapport à y et mesurable si l'on remplace y par une fonction continue $\varphi(x)$ telle que

$$\underline{\omega}(x)\leqq \varphi(x)\leqq \overline{\omega}(x);$$

(ii) il existe une fonction sommable $F(x)$ telle que

$$|f(x, y)|\leqq F(x);$$

(iii) on a

$$\overline{\omega}(x')-\overline{\omega}(x)\geqq \int_x^{x'} f(x, \overline{\omega}(x))\, dx,$$

$$\underline{\omega}(x')-\overline{\omega}(x)\leqq \int_x^{x'} f(x, \underline{\omega}(x))\, dx$$

pour $a\leqq x<x'<a'$.

Dans ces hypothèses, la région (6) est pour (5) un ensemble permettant à droite.