30. *Sur un Théorème de Gelfand*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 13, 1956)

Il est bien connu[1] que l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach est un ouvert, et *a fortiori* dans l'algèbre des endomorphismes continus d'un espace de Banach, l'ensemble des éléments inversibles est un ouvert.

Dans cette note, nous considérons la réciproque de cette proposition pour une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E,E)$ des endomorphismes continus d'un espace vectoriel localement convexe[2] séparé E. De façon précise:

PROPOSITION 1. *Soient E un espace localement convexe séparé sur le corps des nombres réels, et $\mathfrak{S}$ un ensemble de disques*[3] *bornés fermés de E tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à E. Si, dans une sous-algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ de $\mathcal{L}(E,E)$ contenant des applications linéaires continues de rang*[4] 1 *et l'application identique e de E, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, E et $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ sont normables.*

Nous entendons par $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$, l'algèbre $\mathfrak{A}$ munie de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence, et désignons par $W(B, V)$ l'ensemble des $u \in \mathfrak{A}$ tels que l'on ait $u(x) \in V$ quel que soit $x \in B$, où B et V sont deux parties de E.[5]

Dire que l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ est ouvert signifie qu'il existe un voisinage disqué V de 0 dans l'espace E et un élément B de $\mathfrak{S}$ tels que chaque élément de $W(B, V)+e$ soit inversible. En conséquence, pour démontrer la Proposition 1, il suffira de prouver la

PROPOSITION 2. *Employons les mêmes notations que dans la Proposition 1. S'il existe un voisinage de l'application identique e*

1) Cf. I. Gelfand: Normierte Ringe, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S., **9**, 3–24 (1941).

2) Pour la définition de l'espace vectoriel localement convexe, voir N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Chaps. I–II, Hermann, Paris (1953).

3) Une partie d'un espace vectoriel est dite un *disque* si elle est convexe et symmétrique.

4) Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F; la dimension du sous-espace $u(E)$ de F est appelée le *rang* de u. Cf. N. Bourbaki: Algèbre, Chap. II, Hermann, Paris (1947).

5) Lorsque V et B parcourent le système fondamental de voisinages de 0 dans E et l'ensemble $\mathfrak{S}$ respectivement, les ensembles $W(B, V)$ forment un système de voisinages de 0 dans $\mathfrak{A}$; cette topologie est appelée de la *$\mathfrak{S}$-convergence*.

dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ *dont tout élément est une application biunivoque de l'espace* E *sur lui-même,* E *et* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ *sont normables.*

Soit $W(B, V)$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ tel que l'application $u+e$ soit biunivoque pour tout $u \in W(B, V)$ (il va sans dire que V est un voisinage disqué de 0 dans l'espace E et B est un élément de $\mathfrak{S}$).

Supposons qu'il existe un point $a \in V$ n'appartenant pas à B; alors en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue x' sur E telle que

$$|\langle x, x'\rangle| < 1^{6)} \qquad \text{pour tout } x \in B,$$

et

$$\langle a, x'\rangle = -1.$$

Donc l'application linéaire continue $u: x \to \langle x, x'\rangle a$ est un élément de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$, et il est clair que u transforme B en V et que $u(a) = -a$. Cela signifie que $u \in W(B, V)$ et $(u+e)(a)=0$; comme a n'est pas égal à 0, nous conduisons en contradiction.

Ainsi le voisinage V est contenu dans l'ensemble borné B, c'est-à-dire que l'espace E est normable et que $\mathfrak{S}$ est un ensemble réduit au seul élément V. Par suite $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ est aussi normable.

On remarque que, sous l'hypothèse de la Proposition 1, l'algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ n'est pas en général complète.

Par exemple, soit H un espace de Hilbert ayant un système orthonormal complet dénombrablement infini (x_i), et soit $\mathfrak{A}$ un sous-algèbre de $\mathcal{L}(H, H)$ engendrée par l'application identique e et toutes les applications linéaires continues de rang fini. Alors l'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre normée $\mathfrak{A}$ est un ouvert, mais $\mathfrak{A}$ n'est pas complet.

En effet, tout élément de $\mathfrak{A}$ inversible dans $\mathcal{L}(H, H)$ ne peut être de rang fini, donc il doit s'écrire sous la forme $u+\lambda e$, où u est une application linéaire continue de rang fini et $\lambda \neq 0$. Or, pour l'inverse $v \in \mathcal{L}(H, H)$ de l'application $u+\lambda e$, on a

$$e = (u+\lambda e)v = u \circ v + \lambda v,$$

d'où

$$\lambda v = e - u \circ v.$$

Cela signifie que l'application v est un élément de l'algèbre $\mathfrak{A}$, puisque le rang de l'application composée $u \circ v$ est fini. Par conséquent, $\mathcal{L}(H, H)$ étant une algèbre de Banach, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathfrak{A}$ est aussi ouvert.

Cela étant, nous allons démontrer que l'algèbre normée $\mathfrak{A}$ n'est pas complète. Considérons l'application linéaire continue

$$u : x \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle x, x_i\rangle}{2^i} \cdot x_{i+1}$$

---

6) Pour cette notation voir J. Dieudonné et L. Schwartz: La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, Ann. Inst. Fourier, **1**, 61–101 (1949).

de H dans lui-même. L'application u n'appartient pas à l'algèbre $\mathfrak{A}$; en effet, comme l'application $x \to \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i$ représente l'application identique e, on a

$$(u-\lambda e)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle \left(\frac{x_{i+1}}{2^i} - \lambda x_i \right)$$

pour tout nombre réel λ. Quel que soit l'entier positif n, on peut voir facilement que les éléments $x_2 - \lambda x_1, x_3 - \lambda x_2, \cdots, x_{n+1} - \lambda x_n$ de l'espace H sont linéairement indépendants pour tout λ; donc le rang de l'application $u - \lambda e$ ne peut être fini pour tout λ, d'où $u \bar{\in} \mathfrak{A}$.

D'autre part, l'application u adhére à l'algèbre $\mathfrak{A}$; en effet, quel que soit $\varepsilon > 0$, en prenant un entier positif n tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, on a

$$\left\| u(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, x_i \rangle}{2^i} \cdot x_{i+1} \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\langle x, x_i \rangle}{2^i} \cdot x_{i+1} \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

pour tout x dans la boule unité de H. Comme l'application $x \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, x_i \rangle}{2^i} \cdot x_{i+1}$ est évidemment de rang fini, elle est dans $\mathfrak{A}$ pour tout n.

Il en résulte que l'algèbre normée $\mathfrak{A}$ n'est pas complète.

Notons que, si l'algèbre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ considérée dans la Proposition 1 est complète, l'espace E est aussi complet. Plus généralement, on a la Proposition 3.

Nous désignons désormais par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F lorsque E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, et par E' le dual de E, de sorte que E' est l'espace des formes linéaires continues sur E.[7]

PROPOSITION 3. *Soient E et F deux espaces localement convexes, et $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à E. Si l'espace F est séparé et qu'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ de $\mathcal{L}(E, F)$ contenant des applications linéaires continues de rang* 1 *est complète, les F et E' sont complets pour la structure uniforme de F et pour celle de la $\mathfrak{S}$-convergence respectivement.*

Soit x'_0 un élément non nul de E'; si on fait correspondre à tout $y \in F$ l'application $x \to \langle x, x'_0 \rangle y$ de E dans F, on obtient manifestement un homéomorphisme de F dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$ (ceci est aussi un isomorphisme algébrique de F dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$). Si les applications du type $x \to \langle x, x'_0 \rangle y$ convergent vers une application linéaire continue u dans $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$, u est encore du type $x \to \langle x, x'_0 \rangle y$. Ainsi F est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$, d'où F est complet. Prenant un

7) De même façon on peut considérer la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence pour tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

$y_0 \in F$ non nul, et associant à tout $x' \in E'$ l'application $x \rightarrow \langle x, x' \rangle y_0$ de E dans F, on peut démontrer de même que E' muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{S}}$. De ce fait, il s'ensuit que E' est complet pour la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence.

Supposons en particulier que la topologie de l'espace E soit celle de Mackey $\tau(E, E')$;[8] si F et E' sont complets pour la structure uniforme de F et pour celle de la $\mathfrak{S}$-convergence respectivement, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence est complet. En effet, l'espace de toutes les applications de E dans F étant complet pour la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence, il suffit de prouver que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace fermé. Mais comme toute application u de E dans F qui est limite pour la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence d'applications linéaires continues est linéaire, ou encore de montrer qu'elle est continue. Pour cela il suffit de montrer que pour toute $y' \in F'$, $y' \circ u$ est un élément de E', puisque E est muni de la topologie $\tau(E, E')$. Mais c'est clair, E' étant complet pour la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence.

Donc, nous avons établit la

PROPOSITION 4. *Soient E et F deux espaces localement convexes le premier muni de la topologie de Mackey $\tau(E, E')$ et le second de la topologie séparée. Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornées de E tel que l'espace vectoriel engendré par leur réunion soit identique à E. Pour qu'il existe un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ contenant des applications linéaires continues de rang 1 tel qu'il soit complet pour la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence, il faut et il suffit que F soit complet et que E' le soit pour la structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence.*

---

8) Voir J. Dieudonné et L. Schwartz: Loc. cit.