71. Sur un Espace Complet de Mesures Positives dans la Théorie du Potentiel

Par Makoto OHTSUKA
Institut de Mathématiques, Université de Nagoya
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 15, 1956)

Introduction. H. Cartan [2, 3, 4] a developpé la théorie du potentiel newtonien, en utilisant le fait que les mesures positives d'énergie finie forment un espace métrique complet. Mais il s'est appuyé fortement sur les propriétés de l'espace comme un groupe topologique. Si l'espace n'est pas un groupe topologique, une surface de Riemann étant un exemple, on ne sait pas en général si l'espace de mesures positives d'énergie finie est complet.

Dans le présent mémoire nous considérons les potentiels pris par rapport à un noyau général dans un espace localement compact, et démontrerons que l'espace des mesures positives d'énergie finie portées par un compact fixe est complet si on considère des noyaux particuliers.

1. Soit Ω un espace localement compact, et $\Phi(P, Q)$ une fonction numérique positive continue symétrique dans $\Omega\times\Omega$, la valeur $+\infty$ n'étant admise au plus que sur l'ensemble diagonal de $\Omega\times\Omega$. Cette fonction sera applée un *noyau*. Pour une mesure positive μ, on définit l'intégrale

$$\int_{\Omega}\Phi(P, Q)\,d\mu(Q)$$

et on l'appelle le *potentiel* engendré par μ. Il sera noté $U^{\mu}(P)$.

Pour deux mesures positives μ et ν, on désignera par (μ, ν) l'intégrale

$$\int_{\Omega} U^{\mu}(P)\,d\nu(P)=\int_{\Omega} U^{\nu}(P)\,d\mu(P).$$

L'énergie d'une mesure positive μ est définie par (μ, μ). L'ensemble des mesures positives d'énergie finie sera noté $\mathfrak{E}$.

Nous ne considérons désormais que les noyaux tels que les potentiels pris par rapport à ces noyaux satisfont aux deux principes suivants:

Principe d'énergie: $(\mu-\nu, \mu-\nu)=(\mu, \mu)+(\nu, \nu)-2(\mu, \nu)\geqq 0$ *pour tous* $\mu, \nu\in\mathfrak{E}$; *l'égalité a lieu si et seulement si* $\mu\equiv\nu$.

Il suit tout de suite que $(\mu, \nu)^2\leqq(\mu, \mu)(\nu, \nu)$.

Principe de continuité: *Si le potentiel engendré par une mesure positive à support compact est continu comme une fonction sur le* *support de la mesure, il est continu partout dans tout l'espace Ω.*

Le fait que les potentiels newtoniens satisfont au deuxième principe est connu comme le théorème d'Evans-Vasilesco; voir [5] à ce propos. Il est connu que dans l'espace euclidien R^n $(n\geqq 2)$ tout potentiel pris par rapport au noyau $\overline{PQ}^{-\alpha}$, $0<\alpha<n$, satisfait à ces deux principes, et aussi que sur une surface de Riemann hyperbolique quelconque tout potentiel pris par rapport à une fonction de Green y satisfait.

Nous définissons ainsi la *norme* $\|\mu-\nu\|$ de la différence de deux mesures μ et ν de $\mathfrak{E}$ par $\sqrt{(\mu-\nu, \mu-\nu)}$. On considérera $\mathfrak{E}$ comme un espace métrique muni de cette norme.

2. Le résultat principal est le suivant:

Théorème. *Le sous-espace $\mathfrak{E}_K$ de $\mathfrak{E}$ dont le support des mesures est porté par un compact fixe K est complet.*

Dans la démonstration on utilisera

Lemme ([1], p. 62). *Dans l'espace $\mathfrak{M}$ des mesures sur Ω, tout ensemble borné est relativement compact pour la topologie vague.*

En désignant par $\mathfrak{K}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions numériques continues (finies) dans Ω dont le support est compact, on dit qu'une partie H de $\mathfrak{M}$ est *bornée* si, pour toute fonction f de $\mathfrak{K}(\Omega)$, on a $\sup_{\mu\in H}|\mu(f)|<+\infty$. Il en est ainsi d'un ensemble quelconque de mesures de $\mathfrak{E}$ de masse totale uniformément bornée.

Pour démontrer le théorème, on prend une suite quelconque de Cauchy $\{\mu_n\}$ dans $\mathfrak{E}_K$: $\|\mu_m-\mu_n\|\to 0$ comme $m, n\to\infty$. Il existe n_0 tel que, pour tous $m, n\geqq n_0$, on ait $\|\mu_m-\mu_n\|\leqq 1$. Comme $\|\mu_n\|\leqq \|\mu_{n_0}\|+\|\mu_n-\mu_{n_0}\|\leqq\|\mu_{n_0}\|+1$ pour $n\geqq n_0$, $\|\mu_n\|$ est uniformément borné: $\|\mu_n\|<M<+\infty$. Cela montre que $\{\mu_n\}$ est borné dans $\mathfrak{M}$. En effet, $a>0$ étant une borne inférieure de $\Phi(P, Q)$ pour $P, Q\in K$,

$$\|\mu_n\|^2=\int\int\Phi(P, Q)d\mu_n(P)\, d\mu_n(Q)\geqq a\mu_n(\Omega)^2$$

et donc la masse totale $\mu_n(\Omega)\leqq M/\sqrt{a}<\infty$. D'après le lemme, il existe une suite partielle $\{\mu_{n_p}\}$ qui converge vaguement vers $\mu_0\in\mathfrak{E}_K$.

On définit une mesure $\lambda_m(f)$ par $\int U^{\mu_m}fd\mu_m$ pour $f\in\mathfrak{K}(\Omega)$. Par le théorème de Lusin, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact $K_1\subset K$ tel que $\lambda_m(K-K_1)<\varepsilon^2$ et que la restriction de $U^{\mu_m}(P)$ à K_1 soit continue. On désigne par μ'_m la mesure obtenue par restriction de μ_m à K_1. Alors

$$(\mu_m, \mu_n)-(\mu'_m, \mu_n)\leqq\|\mu_n\|\,\|\mu_m-\mu'_m\|\leqq\|\mu_n\|\left(\int U^{\mu_m}d(\mu_m-\mu'_m)\right)^{1/2}$$
$$\leqq M(\lambda_m(K-K_1))^{1/2}<\varepsilon M.$$

D'autre part, comme $U^{\mu_m-\mu'_m}$ est semi-continu inférieurement, $U^{\mu'_m}=U^{\mu_m}-U^{\mu_m-\mu'_m}$ est semi-continu supérieurement sur K_1 et donc y est continu.*) Le principe de continuité montre alors que $U^{\mu'_m}(P)$ est continu partout dans Ω. Donc

$$\lim_{p\to\infty}(\mu'_m, \mu_{n_p})=\lim_{p\to\infty}\int_\Omega U^{\mu'_m}\,d\mu_{n_p}=\int_\Omega U^{\mu_m}\,d\mu_0=(\mu'_m, \mu_0).$$

En considération de la semi-continuité inférieure de norme pour une suite vaguement convergente, il suit que

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\mu_m-\mu_{n_p}\|^2 &\geqq \|\mu_m\|^2+\underline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\mu_{n_p}\|^2-2\,\overline{\lim_{p\to\infty}}\,(\mu_m, \mu_{n_p})\\ &\geqq \|\mu_m\|^2+\|\mu_0\|^2-2\,\overline{\lim_{p\to\infty}}\,(\mu'_m, \mu_{n_p})-2\varepsilon M\\ &=\|\mu_m\|^2+\|\mu_0\|^2-2(\mu'_m, \mu_0)-2\varepsilon M\\ &\geqq \|\mu_m\|^2+\|\mu_0\|^2-2(\mu_m, \mu_0)-2\varepsilon M.\end{aligned}$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit, on a enfin

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\,\|\mu_m-\mu_{n_p}\|^2\geqq\|\mu_m-\mu_0\|^2.$$

Pour $\varepsilon>0$ quelconque, si m et n sont assez grands, soit $m,\ n\geqq n'_0$, alors $\|\mu_m-\mu_n\|<\varepsilon$. Donc si $m\geqq n'_0$, on a

$$\|\mu_m-\mu_0\|\leqq\varepsilon.$$

Cela montre que μ_m converge vers μ_0 fortement comme $m\to\infty$.

C.Q.F.D.

Références

[1] N. Bourbaki: Intégration, Paris (1952).

[2] H. Cartan: Sur les fondaments de la théorie du potentiel, Bull. Soc. Math. France, **69**, 71–96 (1941).

[3] H. Cartan: Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. Math. France, **73**, 74–106 (1945).

[4] H. Cartan: Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, **22**, 221–280 (1946).

[5] H. Cartan et J. Deny: Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta Szeged, **12**, 81–100 (1950).

*) Pour le montrer, j'avait utilisé dans le premier manuscrit l'analogue du lemme 1 dans la thèse de Frostman. Je dois cette simplification du raisonnement à M. Kishi.