165. *Sur un Théorème de M. Kishi*

Par Makoto OHTSUKA
Institut de Mathématiques, Université de Nagoya
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 13, 1956)

1. Soit Ω un espace localement compact, et soit $\Phi(P, Q) > -\infty$ une fonction numérique continue ($+\infty$ n'étant admis au plus que sur l'ensemble diagonal) dans $\Omega \times \Omega$. Pour le noyau Φ et pour une mesure positive finie μ à support compact, on définit le potentiel (droit) $U^{\mu}(P)$ par

$$\int_{\Omega} \Phi(P, Q)\, d\mu(Q);$$

une mesure sera toujours positive finie et à support compact dans ce mémoire.

Nous dirons que le *principe du maximum de Ugaheri généralisé au sens de Kishi* est satisfait lorsque, pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c \geqq 0$ ne dépendant que de Ω, Φ et K telle que

$$U^{\mu}(P) \leqq c \sup_{Q \in K} U^{\mu}(Q)$$

partout dans Ω pour toute μ portée par K.

Kishi [1] a marqué avec (*) la condition suivante:

Si un potentiel $U^{\mu}(P)$ est borné supérieurement sur le support de μ, il l'est partout dans Ω.

Dans le présent mémoire nous appellerons cette condition le *principe de limitation supérieure.*

L'autre principe dont nous aurons besoin est le *principe de continuité* qui énonce que tout potentiel $U^{\mu}(P)$ est continu et fini dans tout l'espace si la restriction de $U^{\mu}(P)$ au support de μ est continue et finie.

Avec certaines conditions additionnelles sur $\Phi > 0$, Kishi [1] a établi dans son théorème le suivant:

Si la capacité intérieure de tout ensemble ouvert non vide est positive, la conjonction du principe d'énergie, du principe de limitation supérieure et du principe de continuité entraîne le principe du maximum de Ugaheri généralisé au sens de Kishi; évidemment celui-ci entraîne le principe de limitation supérieure, mais d'ailleurs il entraîne le principe de continuité.

Dans le présent mémoire nous démontrerons

Théorème 1. *On peut déduire le principe de continuité du principe de limitation supérieure.*

Théorème 2. *Dans le cas où Φ est positif, le principe du maximum de Ugaheri généralisé au sens de Kishi est équivalent au principe de limitation supérieure.*

2. *Démonstration du Théorème 1.* Soit $U^{\mu}(P)$ un potentiel dont la restriction au support S_{μ} de μ est continue et finie. Il suffira de montrer la continuité de $U^{\mu}(P)$ en un point quelconque $P_0 \in S_{\mu}$. Si $\Phi(P_0, P_0) < +\infty$, $U^{\mu}(P)$ est visiblement continu en P_0 comme une fonction dans Ω. Supposons donc que $\Phi(P_0, P_0) = +\infty$. On peut se restreindre dans un voisinage quelconque de P_0 et donc on peut supposer, sans perdre la généralité, que Φ est positif dans $\Omega \times \Omega$. Notons $U_n(P)$ le potentiel engendré par la masse μ_n de μ intérieure de $B_n \equiv \{P; \Phi(P_0, P) > n\}$. Comme $U_n = U^{\mu} - U^{\mu - \mu_n}$ et la restriction de U^{μ} à S_{μ} est continue et finie, la restriction de U_n à S_{μ} est continue et finie. Elle décroit vers 0 lorsque $n \to \infty$ et donc la convergence est uniforme sur S_{μ} d'après un théorème classique.

Cela étant, on va prouver que le principe de limitation supérieure assure la convergence vers 0 de $\sup_{P \in \Omega} U_n(P)$ avec $1/n$. S'il en n'était pas ainsi, on trouverait $\{P_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ tels que $U_n(P_n)$ soit supérieur à un nombre positif, soit α, pour $n=1, 2, \cdots$. Nous choisissons $\{n_k\}$ tels que $\sup_{P \in S_{\mu}} U_{n_k}(P) < 1/(k2^k)$ et posons $\nu_k = k\mu_{n_k}$ et $\nu = \sum_k \nu_k$. Alors sur S_{μ} on a $U^{\nu}(P) < \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k = 1$; donc ν est finie. D'autre part $U^{\nu}(P_{n_k}) \geqq k U_{n_k}(P_{n_k}) > k\alpha \to \infty$ avec k. C'est en contradiction avec le principe de limitation supérieure.

Maintenant on peut achever la démonstration comme d'habitude. On prend n_0 tel que $U_{n_0}(P) < \varepsilon$ en tout $P \in \Omega$. Puisque $U^{\mu}(P) - U_{n_0}(P)$ est continu dans B_{n_0}, on a, pour P assez voisin de P_0,

$$|\{U^{\mu}(P) - U_{n_0}(P)\} - \{U^{\mu}(P_0) - U_{n_0}(P_0)\}| < \varepsilon,$$

d'où

$$|U^{\mu}(P) - U^{\mu}(P_0)| < \varepsilon + U_{n_0}(P) + U_{n_0}(P_0) < 3\varepsilon.$$

Remarque. Soit Ω un espace localement compact non-compact; supposons que $\Phi(P, Q)$ soit fini et qu'il tende uniformément vers $+\infty$ lorsque P tend vers la frontière de Ω pendant que Q reste dans un ensemble compact quelconque. Alors $\Phi(P, Q)$ ne satisfait pas au principe de limitation supérieure mais il satisfait au principe de continuité. Ainsi le principe de continuité n'entraîne pas en général le principe de limitation supérieure.

Démonstration du Théorème 2. Supposons que le principe du maximum de Ugaheri généralisé au sens de Kishi ne soit pas vrai avec $\Phi > 0$. Alors pour chaque entier $n > 0$, il existe une mesure μ_n portée par un compact K et un point P_n tels que

$$U^{\mu_n}(P_n) > 2^n\, n \sup_{P \in K} U^{\mu_n}(P).$$

Posons $\nu_n=\mu_n/\{2^n \sup_{P\in K} U^{\mu_n}(P)\}$ et $\nu=\sum_n \nu_n$; évidemment $S_\nu\subset K$. En chaque point P de K on a

$$U^\nu(P)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{Q\in K} U^{\nu_n}(Q)=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n=1;$$

donc ν est finie. D'autre part

$$U^\nu(P_n)\geqq U^{\nu_n}(P_n)>n.$$

Cela montre que Φ ne satisfait pas au principe de limitation supérieure.

Il est immédiat que le principe du maximum de Ugaheri généralisé au sens de Kishi entraîne le principe de limitation supérieure.

C.Q.F.D.

3. L'auteur propose une autre définition de *principe du maximum de Ugaheri faible* comme suit:

Pour toute μ portée par un compact fixe quelconque K, il existe une constante $c\geqq 0$ ne dépendant que de Ω, Φ et K telle que

$$U^\mu(P)\leqq c\sup_{Q\in S_\mu} U^\mu(Q)$$

en chaque point P de Ω.

Nous allons montrer, par un exemple, que ce principe n'est pas en général une conséquence du principe de limitation supérieure.

Plaçons-nous dans le plan z. Soit $r_0>r_1>\cdots>r_n\to 0$ une suite strictement décroissante quelconque et soit l_n un arc sur le cercle $|z|=r_n$ tel que sa longueur soit décroissante avec $1/n$. En désignant par l_∞ l'origine $z=0$, prenons pour l'espace Ω le compact $\bigcup_{n=1}^{n=\infty} l_n$ muni de la topologie du plan et définissons le noyau symétrique $\Phi(z,\zeta)$ comme suit:

$$\Phi(z,\zeta)=\begin{cases} 1/\sqrt{|z-\zeta|} & \text{si } z \text{ et } \zeta \text{ appartiennent au même } l_n,\\ n/\{C^{(1/2)}(l_n)\}^2 & \text{si } z\in l_n,\ \zeta\in l_m \text{ ou si } z\in l_m,\ \zeta\in l_n \text{ avec } n<m\leqq+\infty,\\ +\infty & \text{si } z=\zeta=0,\end{cases}$$

où $C^{(1/2)}(l_n)$ est la capacité d'ordre 1/2 de l_n au sens de Frostman. C'est une fonction continue ($+\infty$ étant permis) de (z,ζ) qui en effet tend vers $+\infty$ lorsque $z,\zeta\to 0$.

Ce noyau Φ ne satisfait pas au principe du maximum de Ugaheri faible. En effet, soit μ_n la répartition d'équilibre de masse-unité sur l_n par rapport à Φ; $S_{\mu_n}=l_n$ et $U^{\mu_n}(z)=1/\{C^{(1/2)}(l_n)\}^2$ sur l_n $(n<\infty)$. Posons $\mu'_n=\{C^{(1/2)}(l_n)\}^2\mu_n$. Alors $U^{\mu'_n}(z)=1$ sur l_n et $U^{\mu'_n}(0)=n$. n étant arbitrairement grand, on voit que Φ ne satisfait pas au principe.

Toutefois, Φ satisfait au principe de limitation supérieure. Soit ν une mesure quelconque telle que $U^\nu(z)<M<+\infty$ sur S_ν. Désignons par ν_n la restriction de ν à l_n; comme $U^\nu(z)<M$ sur S_ν, l'origine ne porte aucune masse. Évidemment $\nu=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n$. Puisque $\Phi(z,\zeta)=1/\sqrt{|z-\zeta|}$,

considéré comme une fonction sur $l_n \times l_n$ ($n < \infty$), satisfait au principe du maximum de Frostman, $U^{\nu_n}(z)$ est borné supérieurement sur l_n par $\sup_{z \in S_{\nu_n}} U^{\nu_n}(z)$. Donc $U^{\nu_n}(z) < M$ sur l_n. Pour $z \in l_n$ on a

$$\begin{aligned} U^{\nu}(z) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\{C^{(1/2)}(l_k)\}^2} \nu(l_k) + U^{\nu_n}(z) + \frac{n}{\{C^{(1/2)}(l_n)\}^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu(l_k) \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{\{C^{(1/2)}(l_k)\}^2} \nu(l_k) + U^{\nu_n}(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{\{C^{(1/2)}(l_k)\}^2} \nu(l_k) \\ &\leqq U^{\nu}(0) + U^{\nu_n}(z) < U^{\nu}(0) + M < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi $U^{\nu}(z)$ est borné dans Ω.

Nous terminons notre note en écrivant ce que nous avons observé dans le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \text{pr. max. Ugaheri faible} & \rightleftarrows & \text{pr. limit. sup.} & \rightleftarrows & \text{pr. continuité} \\ & & \uparrow\downarrow \ (\Phi > 0) & & \\ & & \text{pr. max. Ugaheri général.} & & \\ & & \text{au sens de Kishi.} & & \end{array}$$

Addendum: après avoir achevé la rédaction du manuscrit, l'auteur a reçu le travail suivant, qui traite un sujet très voisin:

G. Choquet: Les noyaux réguliers en théorie du potentiel, C. R. Acad. Sci., Paris, 243, 635–638 (1956);

un noyau régulier signifie un noyau qui satisfait au principe de continuité à notre sens.

Référence

[1] M. Kishi: On a theorem of Ugaheri, Proc. Japan Acad., **32**, 314–319 (1956).