68. L'Intégrale de Denjoy et l'Intégration au Moyen des Espaces Rangés. III

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 15, 1957)

D'après le Théorème 3 et le Théorème 4 montrés dans la Note "L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I", nous voyons aussitôt que: 1) Si $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Denjoy, il existe au moins une collection maximale f^* qui contient au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété P' et telle que $J[f^*]=f(x)$.[1] Réciproquement, 2) si f^* est une collection maximale qui contient au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété P', la fonction $J[f^*]$ est intégrable au sens de Denjoy et on a $I[f^*]=(D)\int_a^b J[f^*]dx$. Le but de cette Note est de montrer qu'on a de plus que: Considérons la famille $G(P')$[2] des collections maximales dans l'ensemble $U(P')$ des suites fondamentales jouissant de la propriété P', alors il existe une correspondance biunivoque entre les collections maximales $f^*(P')$ de $G(P')$ et les fonctions intégrables au sens de Denjoy, et on a $I[f^*(P')]=(D)\int_a^b J[f^*(P')]dx$.

Commençons d'abord par le

Lemme 6. *Soient $u=\{V(F_n,\mu_n;f_n)\}$ et $v=\{V(H_n,\nu_n;g_n)\}$ deux suites fondamentales qui jouissent de la propriété P' telles qu'on ait $J[u]=J[v]$. Alors, il y a une suite fondamentale $u^*=\{V(F_n^*,\nu_n^*;f_n^*)\}$ qui jouit de la propriété P' et telle qu'on ait à la fois $u^*\leq u$ et $u^*\leq v$.*

Démonstration. On peut supposer que les suites u et v jouissent des propriétés suivantes: On a, pour tout $n=0,1,2,\cdots$,

(1) $\mu_n<\nu_n$,

(2) $\nu_{2n+1}+6<\mu_{2(n+1)}$,

(3) $\text{mes}\,(CF_{2(n+1)})<2^{-(\mu_{2n+1}+\alpha+5)}$ et $\text{mes}\,(CH_{2(n+1)})<2^{-(\nu_{2n+1}+\alpha+5)}$, où α est un nombre naturel tel que $2^\alpha\geq\max\{\max_x f_0(x), \max_x g_0(x)\}$,

(4) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\int_{CF_{2(n+1)}}|f_{2j}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}$,

(5) $\displaystyle\int_{CH_{2(n+1)}}|g_{2n}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}$,

1) Voir K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. II, Proc. Japan Acad., **30**, 912–916 (1954). Dans cette Note, convenons d'identifier deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle.

2) La définition sera donnée plus bas.

$$(6)\quad \sum_{j=0}^{n+1}\int_{CH_{2(n+1)}} |f_{2j}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}.$$

En effet, posons $m_0=0$ et soit n_0 le plus petit nombre des nombres n tels que $\mu_{2m_0}<\nu_{2n}$ et $\mu_{2m_0+1}<\nu_{2n+1}$. Supposons qu'on ait déjà défini les nombres m_i et n_i. Soit m_{i+1} le plus petit nombre des nombres m tels que $\nu_{2n_i+1}+6<\mu_{2m}$, $\operatorname{mes}(CF_{2m})<2^{-(\mu_{2m_i+1}+\alpha'+4)}$ (α' est un nombre naturel tel que $2^{\alpha'}\geq\max\{\max_x f_{m_0}(x), \max_x g_{n_0}(x)\}$) et $\sum_{j=0}^{i}\int_{CF_{2m}} |f_{2m_j}(x)|\,dx <2^{-(\nu_{2n_i+1}+2)}$. Soit n_{i+1} le plus petit nombre des nombres n tels que $\mu_{2m_{i+1}}<\nu_{2n}$, $\mu_{2m_{i+1}+1}<\nu_{2n+1}$, $\operatorname{mes}(CH_{2n})<2^{-(\nu_{2n_i+1}+\alpha'+4)}$, $\int_{CH_{2n}} |g_{2n_i}(x)|\,dx <2^{-(\nu_{2n_i+1}+2)}$ et $\sum_{j=0}^{i+1}\int_{CH_{2n}} |f_{2m_j}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n_i+1}+2)}$. Alors, on voit aussitôt qu'on ait, pour tout $i=0,1,2,\cdots$, $m_i<m_{i+1}$, $n_i<n_{i+1}$, $\mu_{2m_i+1}<\mu_{2m_{i+1}}$ et $\nu_{2n_i+1}<\nu_{2n_{i+1}}$. Donc, si l'on pose $u'=\{V(F'_n, \mu'_n; f'_n)\}$, où $F'_{2i}=F_{2m_i}$, $F'_{2i+1}=F_{2m_i+1}$; $\mu'_{2i}=\mu_{2m_i}-1$, $\mu'_{2i+1}=\mu_{2m_i+1}-1$; $f'_{2i}=f_{2m_i}$, $f'_{2i+1}=f_{2m_i+1}$, et si l'on pose $v'=\{V(H'_n,\nu'_n; g'_n)\}$, où $H'_{2i}=H_{2n_i}$, $H'_{2i+1}=H_{2n_i+1}$; $\nu'_{2i}=\nu_{2n_i}-1$, $\nu'_{2i+1}=\nu_{2n_i+1}-1$; $g'_{2i}=g_{2n_i}$, $g'_{2i+1}=g_{2n_i+1}$, il résulte du Lemme 5[3] que u' et v' sont des suites fondamentales qui jouissent de la propriété P' et telles qu'on ait $u'\leq u$ et $v'\leq v$. Elles possèdent les propriétés (1)-(6), et de plus, puisque $J[u]=J[v]$, on a $J[u']=J[v']$.

Soit $h_n(x)$ la fonction qui coincide avec $f_{2n}(x)$ pour tout $x\in C(H_{2n}-F_{2n})$ et avec $g_{2n}(x)$ pour tout $x\in H_{2n}-F_{2n}$. Posons $F^*_{2n}=F^*_{2n+1}=F_{2(n+1)}\cup H_{2(n+1)}$, $\nu^*_{2n}=\nu_{2n+1}$, $\nu^*_{2n+1}=\nu_{2n+1}+1$ et $f^*_{2n}=f^*_{2n+1}=h_{n+1}$. Alors, on voit que la suite $u^*=\{V(F^*_n,\nu^*_n; f^*_n), n=0,1,2,\cdots\}$ est une suite fondamentale qui jouit de toutes les propriétés voulues. En effet, posons $f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x)$ et $g_{n+1}(x)=g_n(x)+q_n(x)+s_n(x)$, où $p_n(x)$, $r_n(x)$ et $q_n(x)$, $s_n(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant à la condition α) respectivement. Posons $f(x)=J[u]=J[v]$.

1) u^* est une suite fondamentale. La fonction $h_{n+1}(x)$ s'écrit $h_{n+1}(x)=h_n(x)+p^*_{2n-1}(x)+r^*_{2n-1}(x)$, où $p^*_{2n-1}(x)=C_{F_{2n}}(x)(f_{2(n+1)}(x)-f_{2n}(x)) + C_{F_{2(n+1)}\cap CF_{2n}\cap H_{2n}}(x)(f_{2(n+1)}(x)-g_{2n}(x))+C_{H_{2n}\cap CF_{2(n+1)}}(x)(g_{2(n+1)}(x)-g_{2n}(x))$, $r^*_{2n-1}(x)=C_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}(x)f_{2(n+1)}(x)-C_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}(x)f_{2n}(x) +C_{H_{2(n+1)}\cap C(F_{2(n+1)}\cup H_{2n})}(x)g_{2(n+1)}(x)-C_{H_{2(n+1)}\cap C(F_{2(n+1)}\cup H_{2n})}(x)f_{2n}(x) +C_{C(F_{2(n+1)}\cup H_{2(n+1)})}(x)(f_{2(n+1)}(x)-f_{2n}(x))$. On voit alors que: [1°] $r^*_{2n-1}(x)$ s'annule pour tout $x\in F_{2n}\cup H_{2n}=F^*_{2n-1}$. [2°] On a $\int_{F_{2n}}|f_{2(n+1)}(x)-f_{2n}(x)|\,dx \leq\int_a^b|p_{2n+1}(x)|\,dx<2^{-\mu_{2n+1}}$. Il résulte du Lemme 1 que $\int_{F_{2(n+1)}}|f_{2(n+1)}(x)-$

3) Voir S. Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. II, Proc. Japan Acad., **33**, 13-18 (1957).

$f(x)\,|\,dx<2^{-(\mu_{2(n+1)}-1)}$ et $\int_{H_{2n}}|\,g_{2n}(x)-f(x)\,|\,dx<2^{-(\nu_{2n}-1)}$, de sorte qu'on a $\int_{F_{2(n+1)}\cap CF_{2n}\cap H_{2n}}|\,f_{2(n+1)}(x)-g_{2n}(x)\,|\,dx<2^{-(\mu_{2(n+1)}-1)}+2^{-(\nu_{2n}-1)}$. On a $\int_{H_{2n}\cap CF_{2(n+1)}}|\,g_{2(n+1)}(x)-g_{2n}(x)\,|\,dx\leq\int_a^b|\,q_{2n+1}(x)\,|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1})}$. D'autre part, on a, d'après (1), (2) et ce qu'on a $\mu_{n+1}>\mu_n$ et $\nu_{n+1}>\nu_n$, $\mu_{2n+1}\geq\mu_{2n}+1\geq\nu_{2n-1}+8$, $\mu_{2(n+1)}\geq\nu_{2n+1}+7\geq\mu_{2n+1}+8\geq\mu_{2n}+9\geq\nu_{2n-1}+16$, $\nu_{2n}\geq\mu_{2n}+1\geq\nu_{2n-1}+8$ et $\nu_{2n+1}\geq\mu_{2n+1}+1\geq\nu_{2n-1}+9$. Donc, on a $\int_a^b|\,p^*_{2n-1}(x)\,|\,dx<2^{-(\nu_{2n-1}+3)}$.

[3°] On a, d'après (6), $\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}|\,f_{2n}(x)\,|\,dx\leq\int_{CH_{2n}}|\,f_{2n}(x)\,|\,dx<2^{-(\nu_{2n-1}+3)}$. On a, d'après (4) et (6), $\int_{H_{2(n+1)}\cap C(F_{2(n+1)}\cup H_{2n})}|\,f_{2n}(x)\,|\,dx+\int_{C(F_{2(n+1)}\cup H_{2(n+1)})}|\,f_{2(n+1)}(x)-f_{2n}(x)\,|\,dx\leq\int_{CF_{2(n+1)}}|\,f_{2n}(x)\,|\,dx+\int_{CH_{2(n+1)}}|\,f_{2(n+1)}(x)\,|\,dx<2^{-(\nu_{2n+1}+3)}+2^{-(\nu_{2n+1}+3)}$. Ensuite, évaluons la valeur $\left|\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}f_{2(n+1)}(x)dx\right|$. D'après le Lemme 1, on voit d'abord que $\left|\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}f_{2(n+1)}(x)dx-\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}f(x)\,dx\right|\leq\int_{F_{2(n+1)}}|\,f_{2(n+1)}(x)-f(x)\,|\,dx<2^{-(\mu_{2(n+1)}-1)}$. Considérons ensuite touts les intervalles contenus dans $[a, b]$ contigus à l'ensemble fermé $F_{2n}\cup H_{2n}$ et qui contiennent des éléments de $F_{2(n+1)}$. Désignons par J_k $(k=1, 2,\cdots)$ touts les intervalles tels que l'un au moins des extrémités appartient à F_{2n}, et désignons par I_l $(l=1, 2,\cdots)$ touts les autres intervalles. On a alors, d'après le Lemme 4 et (3), $\sum_{k=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_k}f(x)dx\,\right|<2^{-(\nu_{2n-1}+5)}+2^{-(\mu_{2n}-3)}$ et $\sum_{l=1}^{\infty}\left|(D)\int_{I_l}f(x)dx\right|<2^{-(\nu_{2n-1}+5)}+2^{-(\nu_{2n}-3)}$. Désignons par J_{kh} $(h=1, 2,\cdots)$ touts les intervalles contenus dans J_k contigus à $F_{2(n+1)}$, et par I_{lh} $(h=1, 2,\cdots)$ touts les intervalles contenus dans I_l contigus à $F_{2(n+1)}$. On a alors, d'après le Lemme 4 et (3), $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_{kh}}f(x)dx\right|+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{I_{lh}}f(x)dx\right|<2^{-(\mu_{2n+1}+5)}+2^{-(\mu_{2(n+1)}-3)}$. De plus, d'après le Lemme 4, on a $(D)\int_{J_k}f(x)\,dx=\sum_{h=1}^{\infty}(D)\int_{J_{kh}}f(x)\,dx+\int_{J_k\cap F_{2(n+1)}}f(x)\,dx$ et $(D)\int_{I_l}f(x)\,dx=\sum_{h=1}^{\infty}(D)\int_{I_{lh}}f(x)\,dx+\int_{I_l\cap F_{2(n+1)}}f(x)\,dx$, de sorte qu'on a $\left|\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})}f(x)\,dx\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_{J_k\cap F_{2(n+1)}}f(x)\,dx\right|$

$+\sum_{l=1}^{\infty}\left|\int_{I_l \cap F_{2(n+1)}} f(x)\,dx\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_k} f(x)\,dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_{kh}} f(x)\,dx\right|$ $+\sum_{l=1}^{\infty}\left|(D)\int_{I_l} f(x)\,dx\right| + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left|(D)\int_{I_{lh}} f(x)\,dx\right|$. Donc, il s'ensuit que $\left|\int_{F_{2(n+1)}\cap C(F_{2n}\cup H_{2n})} f_{2(n+1)}(x)\,dx\right| < 2^{-(\mu_{2(n+1)}-1)} + 2^{-(\nu_{2n-1}+5)} + 2^{-(\mu_{2n}-3)} + 2^{-(\nu_{2n-1}+5)}$ $+2^{-(\nu_{2n}-3)} + 2^{-(\mu_{2n+1}+5)} + 2^{-(\mu_{2(n+1)}-3)}$. On a de même $\left|\int_{H_{2(n+1)}\cap C(F_{2(n+1)}\cup H_{2n})} g_{2(n+1)}(x)\,dx\right|$ $< 2^{-(\nu_{2(n+1)}-1)} + 2^{-(\mu_{2n+1}+5)} + 2^{-(\mu_{2(n+1)}-3)} + 2^{-(\nu_{2n-1}+5)} + 2^{-(\nu_{2n}-3)} + 2^{-(\nu_{2n+1}+5)}$ $+2^{-(\nu_{2(n+1)}-3)}$. Conséquemment, d'après ce qu'on a $\mu_{2(n+1)} \geq \nu_{2n-1}+16$, $\mu_{2n} \geq \nu_{2n-1}+7$, $\nu_{2n} \geq \nu_{2n-1}+8$, $\mu_{2n+1} \geq \nu_{2n-1}+8$, $\nu_{2(n+1)} \geq \nu_{2n-1}+17$ et $\nu_{2n+1} \geq \nu_{2n-1}+9$, il résulte des inégalités ci-dessus que l'on a $\left|\int_a^b r_{2n-1}^*(x)\,dx\right|$ $< 2^{-(\nu_{2n-1}+2)} + 2^{-(\nu_{2n-1}+3)}$.

Soit $g(x)$ une fonction de $V(F_{2n}^*, \nu_{2n}^*; f_{2n}^*) = V(F_{2(n+1)} \cup H_{2(n+1)}, \nu_{2n+1}; h_{n+1})$. Alors, $g(x)$ s'écrit $g(x) = h_{n+1}(x) + p'(x) + r'(x) = h_n(x) + p_{2n-1}^*(x)$ $+ r_{2n-1}^*(x) + p'(x) + r'(x)$, où $p'(x)$, $r'(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. On voit alors que: [1] $r_{2n-1}^*(x) + r'(x)$ s'annule pour tout $x \in F_{2n} \cup H_{2n}$. [2] On a $\int_a^b | p_{2n-1}^*(x)$ $+ p'(x)\,|\,dx \leq \int_a^b |p_{2n-1}^*(x)|\,dx + \int_a^b |\,p(x)\,|\,dx < 2^{-(\nu_{2n}+3)} + 2^{-(\nu_{2n}+1)} < 2^{-(\nu_{2n-1}+1)}$. [3] On a $\left|\int_a^b (r_{2n-1}^*(x) + r'(x))\,dx\right| \leq \left|\int_a^b r_{2n-1}^*(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b r'(x)\,dx\right| < 2^{-(\nu_{2n-1}+2)}$ $+ 2^{-(\nu_{2n-1}+3)} + 2^{-(\nu_{2n}+1)} < 2^{-(\nu_{2n-1}+1)}$. Donc, $g(x)$ est une fonction de $V(F_{2n-1}^*, \nu_{2n-1}^*; f_{2n-1}^*)$. On a évidemment $V(F_{2n}^*, \nu_{2n}^*; f_{2n}^*) \supseteq V(F_{2n+1}^*, \nu_{2n+1}^*; f_{2n+1}^*)$. Donc, u^* est une suite monotone décroissante des voisinages. On a de plus $f_{2n}^* = f_{2n+1}^*$, $\nu_{2n}^* < \nu_{2n+1}^* \leq \nu_{2(n+1)}^*$, $\mathrm{mes}\,(CF_{2n}^*) < 2^{-\nu_{2n}^*}$ et $\mathrm{mes}\,(CF_{2n+1}^*) < 2^{-\nu_{2n+1}^*}$. Donc, u^* est une suite fondamentale.

2) u^* jouit de la propriété P'. Puisqu'on a $p_{2n}^*(x) = 0$, il est clair qu'on a la propriété $\alpha.1)$ pour $p_{2n}^*(x)$. Pour $p_{2n-1}^*(x)$, la propriété $\alpha.1)$ résulte aussitôt de la définition de p_{2n-1}^*. Puisqu'on a $r_{2n}^*(x) = 0$, il est clair qu'on a la propriété $\alpha.2)$ pour r_{2n}^*. Pour r_{2n-1}^*, on a la propriété $\alpha.2)$ de même que [3°] ci-dessus. $\alpha.3)$ On a $\sum_{m=0}^{2n}\int_{CF_{2n+1}^*} |\,r_m^*(x)\,|\,dx$ $= \sum_{m=1}^{n}\int_{C(F_{2(n+1)}\cup H_{2(n+1)})} |\,r_{2m-1}^*(x)\,|\,dx = \sum_{m=1}^{n}\int_{C(F_{2(n+1)}\cup H_{2(n+1)})} |\,f_{2(m+1)}(x) - f_{2m}(x)\,|\,dx$ $\leq \sum_{m=1}^{n}\int_{CH_{2(n+1)}} |f_{2(m+1)}(x)|\,dx + \sum_{m=1}^{n}\int_{CF_{2(n+1)}} |\,f_{2m}(x)\,|\,dx < 2^{-(\nu_{2n+1}+3)} + 2^{-(\nu_{2n+1}+3)} < 2^{-\nu_{2n+1}^*}$. De même, on a $\sum_{m=0}^{2n+1}\int_{CF_{2(n+1)}^*} |\,r_m^*(x)\,|\,dx < 2^{-\nu_{2(n+1)}^*}$. On a évidemment la propriété (β).

3) On a $u^*\leq u$. Il suffit de montrer qu'on ait, pour tout $n=1, 2,\cdots$, $V(F_{2(n-1)}, \mu_{2(n-1)}; f_{2(n-1)})\supseteq V(F^*_{2n-1}, \nu^*_{2n-1}; f^*_{2n-1})$, c.-à-d. $V(F_{2(n-1)}, \mu_{2(n-1)}; f_{2(n-1)})\supseteq V(F_{2n}\cup H_{2n}, \nu_{2n-1}+1; h_n)$. Si l'on pose $p(x)=-C_{H_{2n}-F_{2n}}(x) f_{2(n-1)}(x)+C_{C(H_{2n}-F_{2n})}(x)p_{2n-1}(x)-C_{H_{2n}-F_{2n}}(x)r_{2n-1}(x)$ et $r(x)=r_{2n-1}(x)+C_{H_{2n}-F_{2n}}(x)g_{2n}(x)$, $h_n(x)$ s'écrit $f_{2(n-1)}(x)+p(x)+r(x)$. D'après (4), [2] et α.3), on a $\int_{H_{2n}-F_{2n}} |f_{2(n-1)}(x)|\,dx\leq \int_{CF_{2n}} |f_{2(n-1)}(x)|\,dx < 2^{-(\nu_{2n-1}+3)} < 2^{-(\mu_{2n-1}+2)}$, $\int_{C(H_{2n}-F_{2n})} |p_{2n-1}(x)|\,dx<2^{-\mu_{2n-1}}$ et $\int_{H_{2n}-F_{2n}} |r_{2n-1}(x)|\,dx\leq\int_{CF_{2n}} |r_{2n-1}(x)|\,dx<2^{-\nu_{2n}}$. Puisqu'on a, d'après (1) et (2), $\mu_{2n}>\mu_{2n-1}+7$, il en résulte que $\int_a^b |p(x)|\,dx < 2^{-\mu_{2n-1}}+2^{-(\mu_{2n-1}+1)}$. De plus, on a $\left|\int_a^b r(x)\,dx\right|<2^{-\mu_{2n-1}}+2^{-(\mu_{2n-1}+1)}$. En effet, il résulte du Lemme 1 qu'on a $\int_{H_{2n}-F_{2n}} |f(x)-g_{2n}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n}-1)}$. Soit J_l $(l=1, 2,\cdots)$ touts les intervalles contenus dans $[a, b]$ contigus à F_{2n} et qui contiennent des éléments de H_{2n}. Pour tout J_l, désignons par J_{lt} $(t=1, 2,\cdots)$ touts les intervalles contenus dans J_l contigus à H_{2n}. On a alors, d'après le Lemme 4 et (3), $\sum_{l=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_l} f(x)\,dx\right|<2^{-(\mu_{2n-1}+5)}+2^{-(\mu_{2n}-3)}$, $\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\left|(D)\int_{J_{lt}} f(x)\,dx\right|<2^{-(\nu_{2n-1}+5)}+2^{-(\nu_{2n}-3)}$ et $(D)\int_{J_l} f(x)\,dx=\sum_{t=1}^{\infty}(D)\int_{J_{lt}} f(x)dx+\int_{J_l\cap H_{2n}} f(x)\,dx$. Donc, on a

$$\left|\int_{H_{2n}-F_{2n}} f(x)\,dx\right|=\left|\sum_{l=1}^{\infty}\int_{J_l\cap H_{2n}} f(x)\,dx\right|\leq\left|\sum_{l=1}^{\infty}(D)\int_{J_l} f(x)\,dx\right|+\left|\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}(D)\int_{J_{lt}} f(x)\,dx\right|$$
$$<2^{-(\mu_{2n-1}+5)}+2^{-(\mu_{2n}-3)}+2^{-(\nu_{2n-1}+5)}+2^{-(\nu_{2n}-3)}.$$

D'après ce qu'on a $\mu_{2n}\geq\mu_{2n-1}+8$, $\nu_{2n}\geq\mu_{2n-1}+9$, et $\nu_{2n-1}\geq\mu_{2n-1}+1$, il s'ensuit que

$$\left|\int_a^b r(x)\,dx\right|\leq\left|\int_a^b r_{2n-1}(x)\,dx\right|+\left|\int_{H_{2n}-F_{2n}} g_{2n}(x)\,dx\right|\leq 2^{-\mu_{2n-1}}+\int_{H_{2n}-F_{2n}} |f(x)-g_{2n}(x)|\,dx$$
$$+\left|\int_{H_{2n}-F_{2n}} f(x)\,dx\right|<2^{-\mu_{2n-1}}+2^{-(\mu_{2n-1}+1)}.$$

Soit $g(x)$ une fonction de $V(F_{2n}\cup H_{2n}, \nu_{2n-1}+1; h_n)$. Alors, $g(x)$ s'écrit $g(x)=h_n(x)+p'(x)+r'(x)=f_{2(n-1)}(x)+(p(x)+p'(x))+(r(x)+r'(x))$, où $p'(x)$, $r'(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Il résulte de celle-ci et des inégalités ci-dessus que $g(x)$ est une fonction de $V(F_{2(n-1)}, \mu_{2(n-1)}; f_{2(n-1)})$.

4) On a $u^*\leq v$. Il suffit de montrer qu'on ait, pour tout $n=1, 2, \cdots$, $V(H_{2(n-1)}, \nu_{2(n-1)}; g_{2(n-1)})\supseteq V(F^*_{2n-1}, \nu^*_{2n-1}; f^*_{2n-1})$, c.-à-d. $V(H_{2(n-1)}, \nu_{2(n-1)}; g_{2(n-1)})\supseteq V(F_{2n}\cup H_{2n}, \nu_{2n-1}+1; h_n)$. Si l'on pose $q(x)=-C_{CH_{2n}}(x)\,g_{2(n-1)}(x)+C_{H_{2n}}(x)\,q_{2n-1}(x)-C_{CH_{2n}}(x)\,s_{2n-1}(x)+C_{H_{2n}\cap F_{2n}}(x)\,(f_{2n}(x)-g_{2n}(x))+C_{CH_{2n}}(x)\,f_{2n}(x)$ et $s(x)=s_{2n-1}(x)$, $h_n(x)$ s'écrit $g_{2(n-1)}(x)+q(x)+s(x)$. D'après (5), [2], α.3) et (6), on a $\int_{CH_{2n}} |g_{2(n-1)}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n-1}+3)}$, $\int_{CH_{2n}} |q_{2n-1}(x)|\,dx$

$<2^{-(\nu_{2n-1})}$, $\int_{CH_{2n}} |s_{2n-1}(x)|\,dx<2^{-\nu_{2n}}$ et $\int_{CH_{2n}} |f_{2n}(x)|\,dx<2^{-(\nu_{2n-1}+3)}$. De plus, du Lemme 1 il résulte que $\int_{H_{2n}\cap F_{2n}} |f_{2n}(x)-g_{2n}(x)|\,dx\leq\int_{F_{2n}} |f_{2n}(x)-f(x)|\,dx$ $+\int_{H_{2n}} |f(x)-g_{2n}(x)|\,dx<2^{-(\mu_{2n-1})}+2^{-(\nu_{2n-1})}$. Donc, on a $\int_a^b |q(x)|\,dx<2^{-\nu_{2n-1}}$ $+2^{-(\nu_{2n-1}+1)}$. En outre, on a $\left|\int_a^b s(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b s_{2n-1}(x)\,dx\right|<2^{-\nu_{2n-1}}$. Soit $g(x)$ une fonction de $V(F_{2n}\cup H_{2n}, \nu_{2n-1}+1, h_n)$. Alors, $g(x)$ s'écrit $g(x)$ $=h_n(x)+q'(x)+s'(x)=g_{2(n-1)}(x)+(q(x)+q'(x))+(s(x)+s'(x))$, où $q'(x)$, $s'(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3]. Il résulte de celle-ci et des inégalités ci-dessus qu'on a $g(x)\in V(H_{2(n-1)}, \nu_{2(n-1)}; g_{2(n-1)})$.

Désignons par $U(P')$ l'ensemble de toutes les suites fondamentales jouissant de la propriété P'. Une famille $f^*(P')$ des suites fondamentales de $U(P')$ sera dite une *collection maximale dans* $U(P')$[4] lorsqu'elle satisfait à deux conditions suivantes: (1) Pour deux suites fondamentales α, β de $f^*(P')$ il existe une suite fondamentale γ de $f^*(P')$ telle qu'on ait à la fois $\gamma\leq\alpha$ et $\gamma\leq\beta$; (2) il n'existe aucune famille des suites fondamentales de $U(P')$ qui satisfait à la condition (1) et qui contient $f^*(P')$ comme sous-famille distincte de $f^*(P')$.

Théorème 5. *Soient $f_1^*(P')$ et $f_2^*(P')$ deux collections maximales dans $U(P')$. Alors,*

1) *Si $J[f_1^*(P')]=J[f_2^*(P')]$, on a $f_1^*(P')=f_2^*(P')$.*

2) *Si $f_1^*(P')\neq f_2^*(P')$, on a $f_1^*(P')\cap f_2^*(P')=0$.*

Démonstration. 1) Puisqu'on a $J[f_1^*(P')] = J[f_2^*(P')]$, pour deux suites fondamentales u_1, u_2 appartenant à $f_1^*(P')\cup f_2^*(P')$, on a $J[u_1]=J[u_2]$. Donc, il y a, en vertu du Lemme 6, une suite fondamentale u appartenant à $U(P')$ telle qu'on ait à la fois $u\leq u_1$ et $u\leq u_2$. Conséquemment, il s'ensuit que $f_1^*(P')=f_2^*(P')$. 2) Supposons qu'il y ait une suite fondamentale de $f_1^*(P')\cap f_2^*(P')$. On a alors $J[f_1^*(P')]$ $=J[f_2^*(P')]$. Donc, on a, d'après 1), $f_1^*(P')=f_2^*(P')$. Il est contraire à $f_1^*(P')\neq f_2^*(P')$.

Désignons par $G(P')$ l'ensemble de toutes les collections maximales $f^*(P')$ dans $U(P')$. Alors, d'après le Théorème 4, le Théorème 5 et le Théorème 3, on a le théorème principal:

Théorème 6. *Pour toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Denjoy, il existe une et une seule collection maximale $f^*(P')$ de $G(P')$ telle que $J[f^*(P')]=f(x)$. La correspondance entre les fonctions intégrables au sens de Denjoy et les collections maximales de $G(P')$ est biunivoque. On a $I[f^*(P')]=(D)\int_a^b J[f^*(P')]\,dx$ pour toute $f^*(P')$ de $G(P')$.*

4) Voir K. Kunugi: Loc. cit., p. 218.