94. Über Kummersche Erweiterungen

Von Mitsuya MORI

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1957)

In der vorliegenden Arbeit wollen wir Kummersche Erweiterungen über einem Körper durch Untergruppen der Gruppe der Charaktere, welche nur von der Multiplikationsgruppe des Grundkörpers abhängt, beschreiben [1–2].[1] Im § 1 untersuchen wir die Struktur dieser Untergruppen. Im § 2 betrachten wir Normenrestsymbol für Charaktere. Im letzten § 3 kommen wir zum klassischen Fall zurück und untersuchen die Beziehung zwischen dem Normenrestsymbol für Charaktere und dem für Primideale.

§ 1. **Die Gruppe der Charaktere.** Es sei k ein Körper mit Charakteristik p_0, welcher die n-ten Einheitswurzeln enthält. Wenn $p_0 \neq 0$ ist, sei $n \not\equiv 0 \pmod{p_0}$. Mit k^* wird die Multiplikationsgruppe von k, und mit k^{*n} die Gruppe der n-ten Potenzen aller Elemente aus k^* bezeichnet. Nun sei K ein abelscher Körper vom Exponenten n über k. Dann gibt es eine k^{*n} enthaltendene Untergruppe H von k^*, derart, daß $(H:k^{*n})=[K:k]$ ist, und K durch Adjungierung der n-ten Wurzeln aller Elemente aus H entsteht. Z sei die additive Gruppe aller ganzen Zahlen, Q die additive Gruppe aller Brüchen, deren Nenner die Teiler von n sind, und Q' die Faktorgruppe Q/Z von Q nach Z. Wir bezeichnen mit E das Tensorprodukt $k^* \otimes Q'$ von k^* und Q' über Z, wobei k^* als multiplikative Gruppe aufgefaßt wird. Ist F das Bild des Tensorproduktes $H \otimes Q'$ über Z, auf das $H \otimes Q'$ durch die natürliche Zuordnung $H \otimes Q' \to k^* \otimes Q'$ übergeht, dann ist F ein endlicher Untermodul von E, und isomorph zu der galoissche Gruppe $G(K/k)$ von K nach k, wobei $G(K/k)$ natürlich als multiplikative Gruppe aufgefaßt wird. Es sei $E^{\wedge}$[2] die kompakte Gruppe der Charaktere von der diskreten Gruppe E, Ψ der Annihilator $(E^{\wedge}, F)$ des Moduls F in $E^{\wedge}$. Dann ist $E^{\wedge}/\Psi \cong F$. Wir bezeichnen mit A_k das Kompositum aller Kummerschen Körper vom Exponenten n über k, mit $G(A_k/k)$ die kompakte galoissche Gruppe von A_k/k. Es sei η ein kontinuierlicher Charakter von $G(A_k/k)$. Dann gibt es ein Element A aus A_k^* derart, daß $\eta(S)=A^{S-1}$ für jedes S aus $G(A_k/k)$ ist, und zwar so, daß A^n zu k^* gehört. Umgekehrt sei a ein Element aus k^*. Dann definiert

1) Y. Kawada hat in seiner Arbeit [2] als Beispiel von Klassenformation Kummersche Erweiterungen über demjenigen Körper, dessen Multiplikationsgruppe Normgruppe jeder endlichen galoisschen Erweiterung wird, betrachtet. Dabei hat er eine solche Gruppe der Charaktere eingeführt, um daraus Klassformation zu konstruieren.

2) Im folgenden bedeutet ^ die kompakte (diskrete) Gruppe der kontinuierlichen Charaktere einer diskreten (kompakten) Gruppe.

$\eta(S)=(a^{1/n})^{S-1}$ einen Charakter von $G(A_k/k)$. Daraus folgt: (a) $E\cong G(A_k/k)^\wedge$, (b) $E^\wedge\cong G(A_k/k)$, (c) $\varPsi\cong G(A_k/K)$. Im folgenden bezeichnen wir die Isomorphismen von E auf $G(A_k/k)^\wedge$, $E^\wedge$ auf $G(A_k/k)$ resp. durch $\varphi_k^\wedge, \varphi_k$. Es sei $\boldsymbol{E}=K^*\otimes Q'$. Man versteht unter der Norm $N_{K/k}$ von $\boldsymbol{E}$ nach E den Homomorphismus $N_{K/k}(A\otimes 1/n)=(N_{K/k}A)\otimes 1/n$. Nun definieren wir für χ aus $E^\wedge$ seine Conorm $N_{k/K}\chi$ folgendermaßen:

$$(1)\qquad (N_{k/K}\chi)(A\otimes 1/n)=\chi(N_{K/k}(A\otimes 1/n)).$$

Wir bezeichnen mit J den Homomorphismus von E in $\boldsymbol{E}$: $J(a\otimes 1/n)=a\otimes 1/n$. σ aus $G(K/k)$ wirkt auf ξ aus $\boldsymbol{E}^\wedge$ durch $\xi^\sigma(A\otimes 1/n)=\xi(A^\sigma\otimes 1/n)$. Nun definieren wir: $N_{K/k}\xi=\Pi\xi^\sigma$, wobei σ alle Elemente der Gruppe $G(K/k)$ durchläuft. Nun zeige ich

Satz 1. *Es gilt*

$$(2)\qquad N_{k/K}\varPsi = N_{K/k}\boldsymbol{E}^\wedge.$$

Beweis: Ist ξ ein Charakter aus $\boldsymbol{E}^\wedge$, $\chi=\xi\cdot J$, dann ist χ ein Charakter aus $\varPsi$. Es sei $A\otimes 1/n$ ein Element aus $\boldsymbol{E}$. Dann ist $N_{K/k}\xi(A\otimes 1/n) = \xi(N_{K/k}(A\otimes 1/n)) = \xi\cdot J((N_{K/k}A)\otimes 1/n) = N_{k/K}(\xi\cdot J)(A\otimes 1/n)=N_{k/K}\chi(A\otimes 1/n)$. Umgekehrt sei χ ein Charakter aus $\varPsi$. Ist T die Substitution aus $G(A_k/k)$, die χ zugeordnet ist, d. h. $\varphi_k^{-1}(T)=\chi$ ist, so gehört T zu $G(A_k/K)$. Nun gibt es eine Substitution T' von A_k/K, welche für die Elemente aus A_k eben T bewirkt. Ist ξ der Charakter aus $\boldsymbol{E}^\wedge$, derart, daß $\varphi_K^{-1}(T')=\xi$ ist, dann gilt für jedes $A\otimes 1/n$ aus $\boldsymbol{E}$ $N_{k/K}\chi(A\otimes 1/n)=\chi((N_{K/k}A)\otimes 1/n)=((N_{K/k}A)^{1/n})^{T-1}=((N_{K/k}A)^{1/n})^{T'-1}=\xi((N_{K/k}A)\otimes 1/n)=N_{K/k}\xi(A\otimes 1/n)$. Damit ist alles bewiesen.

Umgekehrt existiert zu einer vorgelegten offenen Untergruppe $\varPsi$ der Gruppe $E^\wedge$ eine und nur eine Kummersche Erweiterung K über k derart, daß $N_{k/K}\varPsi=N_{K/k}(K^*\otimes Q')^\wedge$ ist. Das ist eine Art vom Existenzsatz Kummerscher Erweiterungen. Wir nennen die Gruppe $\varPsi$ die *K zugeordnete Gruppe der Charaktere in k.*

Nun wird die folgende Tatsache hervorgehoben.

Satz 2. *Sind K_1, K_2 resp. Kummersche Erweiterungen über k vom Exponenten n mit zugeordneten Gruppen $\varPsi_1$, $\varPsi_2$ der Charaktere in k, und $\varPsi'$, $\varPsi''$ resp. die dem Durchschnittskörper $K_1\frown K_2$, dem Kompositum K_1K_2 zugeordneten Gruppen der Charaktere in k, dann ist*

$$(3)\qquad \varPsi'=\varPsi_1\varPsi_2,\quad \varPsi''=\varPsi_1\frown\varPsi_2.$$

Nun sei k' ein Oberkörper von k, J' der Homomorphismus $J'(a\otimes 1/n)=a\otimes 1/n$ von E in $E'=k'^*\otimes Q'$, und $F'=J'F$. Ist $\varPsi_{k'}$ der Annihilator $(E'^\wedge, F')$ von F' in $E'^\wedge$, dann ist $\varPsi_{k'}$ die der Kummerschen Erweiterung Kk' über k' zugeordnete Gruppe der Charaktere in k'. Nun haben wir

Satz 3. *Diese Gruppe $\varPsi_{k'}$ ist die Gruppe der Charaktere χ' aus $E'^\wedge$, derart, daß $\chi'\cdot J'$ zu $\varPsi$ gehört.*

§ 2. **Normenrestsymbol.** Nun betrachten wir den Isomorphismus $E^{\wedge}/\Psi \cong G(K/k)$. Jeder Restklasse von der Substitution S aus $G(A_k/k)$ modulo $G(A_k/K)$ ist umkehrbar eindeutig eine Substitution σ aus $G(K/k)$ zugeordnet. Für χ aus $E^{\wedge}$ definieren wir das *Normenrestsymbol* $(\chi, K/k)$ folgendermaßen:

Es sei $\varphi_k(\chi)=S$ bei (b). Dann setzen wir

$$(\chi, K/k) = \sigma. \tag{4}$$

Nun sei L ein Zwischenkörper vom Grad h', J_L der Homomorphismus $J_L(a\otimes 1/n)=a\otimes 1/n$ von E in $E_L=L^*\otimes Q'$. $G(L/k)$, $G(K/L)$ seien resp. die galoissche Gruppe von L/k, K/L, θ der Homomorphismus von $G(K/k)$ auf $G(L/k)$, welcher jedem Element aus $G(K/k)$ seine Restklasse modulo $G(K/L)$ zugeordnet.

Nun folgt ohne weiteres der folgende

Satz 4. *$\chi \to (\chi, K/k)$ ist ein Isomorphismus von $E^{\wedge}/\Psi$ auf $G(K/k)$, und*

$$(\chi, L/k)=\theta(\chi, K/k), \tag{5}$$

$$(N_{k/L}\chi, K/L)=(\chi, K/k)^{h'}, \tag{6}$$

$$(\xi\cdot J_L, K/k)=(\xi, K/L), \tag{7}$$

wo ξ ein Charakter aus $E_L^{\wedge}$ ist.

Ferner haben wir nach (5)

Satz 5. *Sind K, K' unabhängige Kummersche Erweiterungen über k, dann ist*

$$(\chi, KK'/k)=(\chi, K/k)(\chi, K'/k). \tag{8}$$

Es sei k' ein Oberkörper von k, J' der Homomorphismus $J'(a\otimes 1/n)=a\otimes 1/n$ von E in $E'=k'\otimes Q'$. Wie man leicht einsieht, ergibt sich dann

Satz 6. *Ist χ' ein Charakter aus $E'^{\wedge}$, dann ist $(\chi' J', K/k)$ die durch $(\chi', Kk'/k')$ induzierte Substitution von K/k.*

§ 3. **Ein Spezialfall.** Nun sei der Grundkörper k ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, der die primitiven n-ten Einheitswurzeln enthält. Wir untersuchen die Beziehung zwischen dem Normenrestsymbol für $\mathfrak{p}$ von einer Kummerschen Erweiterung über k und dem früher definierten für Charaktere etwas näher. Es sei η ein Charakter aus $G(A_k/k)$, $a\otimes 1/n$ das η zugeordnete Element aus E, so daß $\varphi_k^{\wedge}(a\otimes 1/n)=\eta$ bei (a) ist. G_η sei die Untergruppe derjenigen Substitutionen aus $G(A_k/k)$, die durch η 0 zugeordnet werden. Ist Z_η der zu G_η gehörige zyklische Teilkörper von A_k, so ist $Z_\eta=k(a^{1/n})$. Es sei b eine Zahl $\neq 0$ aus k, $\left(\frac{b, Z_\eta}{\mathfrak{p}}\right)$ das Normenrestsymbol für $\mathfrak{p}$ von Z_η. Wir setzen $(b\otimes 1/n, \eta)=\left(\frac{b, Z_\eta}{\mathfrak{p}}\right)$. Dann gilt

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2, \eta)=(\mathfrak{b}_1, \eta)(\mathfrak{b}_2, \eta) \tag{9}$$

mit $\mathfrak{b}_i=b_i\otimes 1/n$, $i=1, 2$, aus E, mit η aus $G(A_k/k)^{\wedge}$,

$$(\mathfrak{b}, \eta_1\eta_2)=(\mathfrak{b}, \eta_1)(\mathfrak{b}, \eta_2) \tag{10}$$

mit $\mathfrak{b}=b\otimes 1/n$ aus E, mit η_i, $i=1, 2$, aus $G(A_k/k)^\wedge$. Das heißt aber, daß $(*, \eta)$ *ein Charakter von* E *ist, wenn der Charakter* η *aus* $G(A_k/k)$ *festgesetzt ist, und* $(b\otimes 1/n, *)$ *für ein festgesetztes Element* $b\otimes 1/n$ *aus* E *ein Charakter von* $G(A_k/k)$ *ist.*

Nun wollen wir einen Satz erledigen, welcher einigermaßen die Beziehung zwischen dem Normenrestsymbol für Charaktere und dem für Primideale erklärt.

Satz 7. *Ist* $a\otimes 1/n$ *ein Element aus* $E, \chi=(*, \varphi_k^\wedge(a\otimes 1/n))$ *der durch* $a\otimes 1/n$ *definierte Charakter von* E, *dann gilt*

$$\left(\frac{a, k(b^{1/n})}{\mathfrak{p}}\right)=(\chi, k(b^{1/n})/k) \tag{11}$$

für jedes $b\neq 0$ *aus* k.

Beweis: Sei $\sigma=(\chi, k(b^{1/n})/k)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(b^{1/n})^{\sigma-1}&=\chi(b\otimes 1/n)=(b\otimes 1/n, \varphi_k^\wedge(a\otimes 1/n))\\ &=\left(\frac{b, k(a^{1/n})}{\mathfrak{p}}\right)a^{1/n}/a^{1/n}=\left(\frac{a, k(b^{1/n})}{\mathfrak{p}}\right)b^{1/n}/b^{1/n}, \quad \text{w.z.b.w.}\end{aligned}$$

Referenzen

[1] K. Iwasawa: A note on Kummer extensions, J. Math. Soc. Japan, **5**, 253–262 (1953).
[2] Y. Kawada: On class formations, Duke Math. J., **22**, 165–177 (1955).