47. *Sur la Dérivation de l'Intégrale* (E. R.) *Indéfinie. I*

Par Shizu NAKANISHI

Faculté des Sciences, Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1958)

En utilisant la méthode des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a élargi la notion de l'intégrale dans la Note "Application de la méthode des espaces rangés à la theorie de l'intégration. I".[1] Le but de ces Notes est d'examiner la dérivation de cette intégrale nouvelle (nous la désignerons par intégrale (*E. R.*)).

Dans ces Notes, nous nous conformons, en général, à la notation et à la terminologie de la Note de Prof. K. Kunugi.

Soit $u=\{u_n\}$, $u=V(F_n,\nu_n;f_n)$, une suite fondamentale. Puisqu'alors $f_{n+1}(x)$ est une fonction de $V(F_n,\nu_n;f_n)$, on peut poser, pour tout n $(n=0,1,2,\cdots)$,

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+p_n(x)+r_n(x),$$

où $p_n(x)$, $r_n(x)$ sont des fonctions en escalier satisfaisant aux conditions [1], [2] et [3].[2] Posons $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$.[3] Désormais, nous désignerons l'intégrale (*E. R.*) de $f(x)$, c.-à-d. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$ par (*E. R.*) $\int_a^b f(x)\,dx$.

On a toujours $\text{mes}(F'-F'')=0$ pour deux voisinages $V(F',\nu';f')$ et $V(F'',\nu'';f'')$ tels que $V(F',\nu';f')\subseteq V(F'',\nu'';f'')$. Donc, pour la suite fondamentale $\{V(F_n,\nu_n;f_n)\}$ quelconque, si l'on pose

$$F_m^*=\bigcap_{n=m}^{\infty}F_n,$$

$\{F_m^*\}$ est une suite non-décroissante, de presque total $[a,b]$, des ensembles fermés telle que $F_m^*\subseteq F_m$ et $\text{mes}\,F_m^*=\text{mes}\,F_m$.

Cela posé, commençons par montrer deux théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$, *une suite fondamentale. Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. *Alors, on a presque partout*

$$f(x)=f_0(x)+h(x)+g(x),$$

où $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)$ *et* $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x)$.

En effet, on a d'abord, par induction, pour tout entier positif m,

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

2) Elles désignent les conditions [1], [2] et [3] qui sont données dans la Note de K. Kunugi: Loc. cit., c.-à-d. [1] $r(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F. [2] On a $\int_a^b|p(x)|\,dx<2^{-\nu}$. [3] On a $\left|\int_a^b r(x)dx\right|<2^{-\nu}$.

3) Dans ces Notes, nous identifions, en général, deux fonctions qui ne sont différentes que sur un ensemble de mesure nulle.

$f_m(x)=f_0(x)+\sum_{n=0}^{m-1} p_n(x)+\sum_{n=0}^{m-1} r_n(x)$. Soit x un point quelconque de $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n^*$. Puisqu'alors il existe un n_0 tel que $x\in F_{n_0}^*$, x appartient à tout F_n où $n\geq n_0$, et par suite $r_n(x)=0$ pour tout $n\geq n_0$. Donc, il existe une limite $\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)=\sum_{n=0}^{n_0-1} r_n(x)$. Nous avons, par conséquent, presque partout $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)$.

Théorème 2. *Pour toute suite fondamentale* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *on a*

$$(E.\ R.)\ \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f_0(x)\,dx+\int_a^b h(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b r_n(x)\,dx,$$

$$\int_a^b h(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b p_n(x)\,dx.$$

En effet, puisqu'on a pour tout entier positif m,

$$f_m(x)=f_0(x)+\sum_{n=0}^{m-1} p_n(x)+\sum_{n=0}^{m-1} r_n(x),$$

on a d'abord

$$\int_a^b f_m(x)\,dx=\int_a^b f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{m-1}\int_a^b p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{m-1}\int_a^b r_n(x)\,dx.$$

Ensuite, puisqu'on a, pour la fonction $p^*(x)=\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(x)|$,

$$\int_a^b p^*(x)\,dx\leq\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b |p_n(x)|\,dx<\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\nu_n},$$

la fonction $p^*(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue et on a $\left|\sum_{n=0}^{m} p_n(x)\right| \leq p^*(x)$ pour tout m. Donc, en vertu du Théorème de Lebesgue, la fonction $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue et on a $\int_a^b h(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b p_n(x)\,dx$. D'ailleurs, pour deux entiers positifs n_1, n_2 tels que $n_2>n_1$, on a

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2}\left|\int_a^b r_n(x)\,dx\right|<\sum_{n=n_1+1}^{n_2} 2^{-\nu_n}<2^{-\nu_{n_1+1}+2}.$$

Donc, $\sum_{n=0}^{m}\int_a^b r_n(x)\,dx$ $(m=1, 2,\cdots)$ forment une suite de Cauchy des nombres réels, de sorte qu'on ait la limite $\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b r_n(x)\,dx$.

Considérons dans la définition de voisinage $V(F, \nu; f)$ de l'espace ε, une condition suivante [3_1] au lieu de la condition plus faible [3].

[3_1] Pour tout intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$, on a

$$\left|\int_c^d r(x)\,dx\right|<2^{-\nu}.$$

Nous appellerons une suite fondamentale de ce cas une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$. Alors, pour toute suite fondamentale $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, nous pouvons définir l'intégrale (*E. R.*) pour tout intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$. Donc, nous pouvons définir dans $[a, b]$ l'intégrale (*E. R.*) indéfinie $F(x)=(E.\ R.) \int_a^x f(x)\,dx$.

Théorème 3. *Soit $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$. Alors, pour des intervalles quelconques $[c, d]$ et $[d, f]$ qui n'empiètent pas l'un sur l'autre et dont la somme est aussi un intervalle, on a*

$$(E.\ R.) \int_c^f f(x)\,dx=(E.\ R.) \int_c^d f(x)\,dx+(E.\ R.) \int_d^f f(x)\,dx.$$

Théorème 4. *Soit $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, une suite fondamentale satisfaisant à la condition $[3_1]$. Posons $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Alors, l'intégrale (E. R.) indéfinie de $f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$.*

En effet, puisqu'on a $F(x)=\int_a^x f_0(x)\,dx+\int_a^x h(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx$, il suffit de montrer que la fonction $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx$ est continue. Soient x_0 un point de $[a, b]$ quelconque et ε un nombre positif quelconque. Alors, il existe un entier positif $n_0=n_0(\varepsilon)$ tel que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-\nu_n} < \varepsilon/2$. Pour la fonction $\sum_{n=0}^{n_0} r_n(x)$, il existe un nombre positif $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$ tel qu'on ait, quel que soit $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\left|\sum_{n=0}^{n_0}\int_{x_0}^x r_n(x)\,dx\right|<\varepsilon/2$. Donc, on a pour tout $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$

$$\begin{aligned}\left|G(x)-G(x_0)\right| &\leq \left|\sum_{n=0}^{n_0}\int_{x_0}^x r_n(x)\,dx\right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|\int_{x_0}^x r_n(x)\,dx\right| \\ &< \varepsilon/2+\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-\nu_n}<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

Nous disons encore qu'une suite fondamentale $\{V(F_n, \nu_n; f_n)\}$ satisfait aux conditions $[3_1]$ et $[3_2]$ lorsqu'on considère, en outre de la condition $[3_1]$, la condition suivante:

$[3_2]$ Pour tout système élémentaire d'intervalles I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$[4] tels que les extrémités appartiennent à F, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r(x)\,dx\right|<2^{-\nu}.$$

Dans la suite, nous montrons qu'on peut alors considérer la dérivation de l'intégrale (*E. R.*) indéfinie.

4) On dit qu'un système d'intervalles est élémentaire, lorsqu'il est composé d'un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres.

Théorème 5. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$. *Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, l'intégrale (E. R.) indéfinie de* $f(x)$ *est une fonction à variation bornée au sens large sur tout* $F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty} F_m$[5] $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

Démonstration. Puisque l'intégrale indéfinie de Lebesgue est une fonction à variation bornée, il suffit encore de montrer que la fonction $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx$ est à variation bornée au sens large sur tout F_n^*. Soit $\{[a_i, b_i]\}$ la suite des intervalles contigus à F_n^* et contenus dans $[a, b]$. Alors, pour tout $m\geq n$, les extrémités des intervalles appartiennent à F_m. Donc, on a, d'après la condition $[3_2]$, $\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{a_i}^{b_i} r_m(x)\,dx\right|\leq 2^{-\nu_m}$ pour tout $m\geq n$, et par suite on a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{a_i}^{b_i} r_m(x)\,dx\right|\leq \sum_{m=0}^{n-1}\int_a^b |r_m(x)|\,dx+\sum_{m=n}^{\infty}2^{-\nu_m}.$$

Soient $[c_j, d_j]$ $(j=1, 2, \cdots, j_0)$ un système élémentaire d'intervalles tels que les extrémités appartiennent à F_n^*, et pour tout j, $[c_{ji}, d_{ji}]$ $(i=1, 2, \cdots)$ la suite des intervalles contigus à F_n^* et contenus dans $[c_j, d_j]$. Alors, les extrémités des $[c_{ji}, d_{ji}]$ appartiennent à F_n^*. Donc, il s'ensuit, d'après l'inégalité ci-dussus, que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{j_0}\left|G(d_j)-G(c_j)\right| &\leq \sum_{j=1}^{j_0}\sum_{m=0}^{n-1}\left|\int_{[c_j, d_j]\frown F_n^*} r_m(x)\,dx\right|+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{j_0}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{c_{ji}}^{d_{ji}} r_m(x)\,dx\right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{n-1}\int_a^b |r_m(x)|\,dx+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{a_i}^{b_i} r_m(x)\,dx\right| \\ &\leq 2\sum_{m=0}^{n-1}\int_a^b |r_m(x)|\,dx+\sum_{m=n}^{\infty}2^{-\nu_n}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $G(x)$ est à variation bornée sur F_n^*, puisque le dernier nombre ne dépend que de n.

En vertu du Théorème 5 et du Théorème de Denjoy-Khintchine,[6] on en déduit immédiatement le théorème suivant.

Théorème 6. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$. *Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, l'intégrale (E. R.) indéfinie de* $f(x)$ *est approximativement dérivable presque partout dans* $[a, b]$.

Théorème 7. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$. *Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *et* $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$. *Alors, on a dans* $[a, b]$ *presque partout*

5) Pour la définition, voir, par exemple, S. Saks: Theory of the Integral, 221 (1937).

6) Voir, par exemple, S. Saks: Loc. cit., 222.

$$F'_{ap}(x)^{7)} = f(x).$$

Démonstration. La fonction $f(x)$ s'écrit

$$F(x)=N(x)+H(x)+G(x),$$

$$N(x)=\int_a^x f_0(x)\,dx,\ H(x)=\int_a^x h(x)\,dx,\ G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx,$$

et pour les fonctions $N(x)$ et $H(x)$, on a presque partout

$$N'(x)=f_0(x), \quad H'(x)=h(x).$$

Donc, en vertu du Théorème 1, il suffit de montrer qu'on a presque partout $G'_{ap}(x)=g(x)$ où $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)$. Considérons un ensemble F^*_m $F^*_m=\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n$. Soit M'_m l'ensemble des points de densité de F^*_m dont la fonction $G(x)$ est approximativement dérivable. Alors, en vertu du Théorème 6, M'_m est un ensemble contenu dans F^*_m et tel que $\text{mes}\,(F^*_m-M'_m)=0$. Posons pour tout n

$$G_n(x)=\int_a^x g(x)\,C_{F^*_n}(x)^{8)}\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_a^x r_i(x)\,C_{F^*_n}(x)\,dx.$$

Alors, pour tout n, il existe un ensemble M''_n de presque total $[a, b]$ tel qu'on ait, quel que soit $x\in M''_n$, $G''_n(x)=g(x)=\sum_{i=0}^{n} r_i(x)$. Par suite, si l'on pose $M^*_m=M'_m\cap(\bigcap_{n=m}^{\infty} M''_n)$, l'ensemble M^*_m possède les propriétés suivantes:

1°) On a $M^*_m\subseteq F^*_m$ et $\text{mes}\,(F^*_m-M^*_m)=0$.

2°) Tous les points de M^*_m sont des points de densité de F^*_n, quel que soit $n\geq m$.

3°) On a $G'(x)=g(x)$ pour tout x appartenant à M^*_m.

4°) $G(x)$ est approximativement dérivable dans M^*_m.

Soit A l'ensemble des points de M^*_m tels qu'on ait $G'_{ap}(x)\neq g(x)$, et supposons que la mesure de A soit positive. Alors, si l'on pose

$$A_1=[x\in M^*_m;\ G'_{ap}(x)-g(x)>0]$$
$$A_2=[x\in M^*_m;\ G'_{ap}(x)-g(x)<0],$$

l'un au moins des ensembles A_1 et A_2 possède la mesure positive. Nous allons démontrer seulement du cas où $\text{mes}\,A_1>0$. Puisqu'alors la mesure de A_1 est positive, et que les fonctions $G'_{ap}(x)$ et $g(x)$ sont mesurables, il existe un nombre réel λ tel que

$$\text{mes}\,A^*_1=\alpha>0 \text{ où } A^*_1=[x\in M^*;\ G'_{ap}(x)-g(x)>\lambda],$$

et un ensemble ouvert K tel que

$$K\supseteq A^*_1,\ \text{mes}\,(K-A^*_1)<\alpha/2 \text{ et } \sum_{n=0}^{m_1-1}\int_{K-A^*_1}|r_n(x)|\,dx<\lambda\alpha/4.$$

Nous considérons en outre un entier positif m_1 tel que $m_1>m$ et

7) Pour une fonction quelconque $F(x)$, $F'_{ap}(x)$ désigne la dérivée approximative de $F(x)$.

8) Pour un ensemble quelconque M, $C_M(x)$ désigne la fonction caractéristique de M.

$\sum_{m=n_1}^{\infty} 2^{-\nu_n} < \lambda\alpha/4$. Nous posons que, pour un intervalle I contenu dans $[a, b]$ quelconque,

$$G(I)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_I r_n(x)\,dx,$$

$$G_m(I)=\int_I g(x)\,C_{F_m^*}(x)\,dx=\sum_{n=0}^{m-1}\int_I r_n(x)\,C_{F_m^*}(x)\,dx \qquad (m=0, 1, 2,\cdots).$$

Soit x un point de A_1^*. Alors, le point x est un point densité de $F_{m_1}^*$, et on a $G'_{m_1}(x)=g(x)$, par suite $G'_{ap}(x)-G'_{m_1}(x)>\lambda$. Donc, pour tout point x de A_1^*, il existe une suite des intervalles, contenus dans K, $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ jouissant des propriétés suivantes:

5°) On a $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{x\}$.

6°) Les extrémités de I_n appartiennent à F_{m_1} pour tout n.

7°) On a $G(I_n)-G_{m_1}(I_n)>\lambda\,\mathrm{mes}\,(I_n)$ pour tout n.

Considérons pour tout point $x\in A_1^*$ une telle suite des intervalles $\{I_n\}$ et soit Q la famille des intervalles. Puisqu'alors Q couvre A_1^* au sens de Vitali, il existe dans Q une suite finie ou dénombrable d'intervalles disjoints $\{J_i\}$ contenus dans K telle que

8°) $\mathrm{mes}\,(A_1^*-\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i)=0$.

On a d'abord pour la suite $\{J_i\}$ l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}(G(J_i)-G_{m_1}(J_i))&>\sum_{i=1}^{\infty}\lambda\,\mathrm{mes}\,(J_i)\\ &\geqq\lambda\Big(\mathrm{mes}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i\cap A_1^*\Big)-\mathrm{mes}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}J_i-A_1^*\Big)\Big)\\ &>\lambda\,(\mathrm{mes}\,A_1^*-\mathrm{mes}\,(K-A_1^*))>\lambda\alpha/2.\end{aligned}$$

D'autre part, si l'on désigne pour tout J_i $(i=1, 2,\cdots)$ par K_{il} $(l=1, 2,\cdots)$ la suite des intervalles contigus à $F_{m_1}^*$ et contenus dans J_i, on a d'après la propriété $[3_2]$

$$\sum_{n=m_1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big|\int_{K_{il}} r_n(x)\,dx\Big|\leq\sum_{n=m_1}^{\infty}2^{-\nu_n}.$$

Donc, il en déduit qu'on a l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}(G(J_i)-G_{m_1}(J_i))&=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{m_1-1}\int_{J_i-F_{m_1}^*} r_n(x)\,dx+\sum_{n=m_1}^{\infty}\int_{J_i} r_n(x)\,dx\Big)\\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{m_1-1}\int_{J_i-F_{m_1}^*} r_n(x)\,dx+\sum_{n=m_1}^{\infty}\int_{J_i-F_{m_1}^*} r_n(x)\,dx\Big)\\ &\leq\sum_{n=0}^{m_1-1}\int_{K-F_{m_1}^*}|\,r_n(x)\,|\,dx+\sum_{n=m_1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Big|\int_{K_{il}} r_n(x)\,dx\Big|\\ &\leq\sum_{n=0}^{m_1-1}\int_{K-A_1^*}|\,r_n(x)\,|\,dx+\sum_{n=m_1}^{\infty}2^{-\nu_n}<\lambda\alpha/4+\lambda\alpha/4=\lambda\alpha/2,\end{aligned}$$

contrairement à l'inégalité ci-dessus.