112. *Ueber einen Homomorphismus bei der Transformation von Sphären*

Von Joseph WEIER

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 13, 1958)

Seien $r>n>0$ natürliche Zahlen, S^i eine i-Sphäre, q ein Punkt aus S^r, weiter α ein Element der Homotopiegruppe $\pi_r(S^n)$ und f eine Abbildung aus α. Dann kann man jedem Punkt p aus der Sphäre S^r derart einen in $f(p)$ beginnenden an S^n tangentialen Vektor $v(p)$ zuordnen, dass gilt: es ist v stetig, $v(q)=0$, für alle $p \in S^r - q$ ist $v(p) \neq 0$.

Das Vektorfeld v bestimmt wie folgt eine stetige Abbildung g: $S^{r-1} \to S^{n-1}$. Seien δ eine positive Zahl kleiner als der Durchmesser von S^r, ε eine positive Zahl kleiner als der Durchmesser von S^n, U die offene δ-Umgebung von q bezüglich S^r, V die offene ε-Umgebung von q bezüglich S^n und $f(\overline{U}) \subset V$. Weiter seien A die $(r-1)$-Sphäre $\overline{U}-U$ und B die $(n-1)$-Sphäre $\overline{V}-V$. Projiziert man vom Mittelpunkt von S^n aus den Halbstrahl aus $f(p)$ durch $v(p)$ auf S^n, so hat die Projektion mit B genau einen gemeinsamen Punkt, er heisse $g'(p)$. Hierauf ist g: $S^{r-1} \to S^{n-1}$ die durch g': $A \to B$ bestimmte Abbildung.

Bezeichnet β das durch g bestimmte Element von $\pi_{r-1}(S^{n-1})$, so wollen wir $h(\alpha)=\beta$ setzen. Die Abbildung

$$h: \quad \pi_r(S^n) \to \pi_{r-1}(S^{n-1})$$

ist ein Homomorphismus. Und es gilt das folgende

THEOREM. *Zu jeder natürlichen Zahl d gibt es eine natürliche Zahl ζ, die die Eigenschaft hat: sind $r>n>0$ natürliche Zahlen mit*

$$r-n=d \text{ und } n \geq \zeta$$

und ist α ein Element aus $\pi_r(S^n)$ mit

$$h(\alpha) \neq 0,$$

so besitzt die Gleichung $f^1(p)=f^2(p)$ stets wenigstens eine Lösung, welches auch immer die Abbildungen $f^1 \in \alpha$ und $f^2 \in \alpha$ sind.

Offenbar ist v Feld, champ im Sinne von [1], mit einer Singularität in einem durch (S^r, S^n, f) bestimmten Faserraume. Das Element $\beta=\beta(f)$, das eine Invariante der Homotopieklasse von f ist, ist verwandt mit einer Homotopieinvariante [2, p. 178] aus der Cohomologietheorie der Obstruktionen. Wie näherhin das vorstehende Theorem in the Cotheorie der Hindernisse und die Algebra [3] der Abbildungstheorie gewisser Komplexe einzuordnen ist, wird in einer Note dargelegt, die das obige Theorem beweist.

References

[1] C. Ehresmann: Sur la Théorie des Espaces Fibrés, Colloque Intern. Topologie Algébrique, Paris, 3-15 (1949).
[2] N. Steenrod: The Topology of Fibre Bundles, Princeton Math., series 14 (1951).
[3] H. Cartan: Algebraic Topology, Cambridge, Mass. (1951).