157. *Sur l'Inégalité d'Energie pour l'Equation Différentielle p-Parabolique*

Par Takeshi KOTAKE

Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. Introduction. A propos de l'équation p-parabolique, M. S. Mizohata [7] a réussi à résoudre le problème de Cauchy du point de vue de M. J. Leray [5], en appliquant la théorie de semi-groupe. D'autre part, M. L. Gårding, dans son mémoire récent [2], a montré une voie élémentaire pour le problème de Cauchy relatif à l'équation hyperbolique, où il réduit le problème à la démonstration de deux inégalités: inégalité d'énergie et celle de duale. Alors un problème se pose, celui de savoir s'il n'est pas possible de procéder de la même façon pour l'équation parabolique. Cet article est donc consacré à démontrer deux inégalités analogues, qui ont pour conséquence le résultat que voici:

Soit $\mathcal{A}(x, D)$ un opérateur p-parabolique d'ordre $m+1$ à coefficients indéfiniment différentiables uniformément bornés, alors $\mathcal{A}(x, D)$ définit un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+1,q}$ sur $\mathcal{H}^{o,q}$. (Voir les travaux de M. Ladyzenskaja [6], où l'on trouve le cas particulier.)

Soit $\mathcal{D}$ une bande dans R^{n+1}, définie par $\{x\in R^{n+1};\ 0\leq x_0\leq 1\}$, $\mathcal{D}_t$, π_t, et $\mathcal{D}_t^*$ sont les parties de $\mathcal{D}$ correspondant respectivement à $0\leq x_0\leq t$, $x_0=t$ et $t\leq x_0\leq 1$. Soit E^{n+1} l'espace dual de R^{n+1} par rapport à la forme bilinéaire $\langle x, \xi\rangle=\sum x_j\cdot\xi_j$; α est un multi-indice aux composants de nombre entier positif, pour lequel on associe deux normes: $|\alpha|=\sum\alpha_j$ et $|\alpha|_P=\alpha_{0P}+\alpha_i+\cdots\alpha_n$, où p est un entier défini tout à l'heure. $C^{k,q}(\mathcal{D})$ est une famille des fonctions définies dans $\mathcal{D}$, à support compact, ayant les dérivées continues jusqu'à l'ordre α, où $\alpha_0\leq k$, $|\alpha|_P\leq kp+q$; $C^\infty(\mathcal{D})=\bigcap_{k,q} C^{k,q}(\mathcal{D})$.

Soit $\mathcal{A}(x, D)=\sum\mathcal{A}_\alpha(x)D^\alpha$ $(D^\alpha=D_{x_0}^{\alpha_0}D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n})$ un opérateur différentiel défini dans $\mathcal{D}$. On dit alors avec M. Petrowsky [8] que $\mathcal{A}(x, D)$ est régulièrement p-parabolique d'ordre $m+1$, si les conditions suivantes sont satisfaites: 1) $\mathcal{A}_\alpha(x)=1$ pour $\alpha=(m+1, 0, \cdots, 0)$ et il existe un entier p tel que $|\alpha|_P\leq(m+1)p$, 2) pour les parties réelles des racines caractéristiques λ_j de $\mathcal{A}_0(x, D)$, on a une constante $\delta<0$ telle que $Re\,\lambda_j(x;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\leq\delta|\xi|^P$, où l'on entend par $\mathcal{A}_0(x, D)$ la partie principale de $\mathcal{A}(x, D)$, formée des termes correspondant à $|\alpha|_P=(m+1)p$.

Pour simplifier, nous supposons dans toute la suite que les coefficients de $\mathcal{A}(x, D)$, ainsi que toutes leurs derivées, soient uniformément bornés dans $\mathcal{D}$.

Dans notre raisonnement deux lemmes suivants jouent le rôle fondamental.

Lemme 1.1 (Gårding). *Soient $r(t)$, $s(t)$, et $k(t)$ les fonctions non négatives définies dans l'intervalle* $[0,1]$. *Supposons que $r(t)$ soit intégrable et que $k(t)$ soit non décroissant, alors l'inégalité*:

$$r(t)+s(t)\leq c\int_0^t r(t)\,dt+k(t) \qquad c>0$$

entraîne:
$$r(t)+s(t)\leq k(t)e^{ct}.$$

Soit $D_{t,\lambda}=D_t-\lambda$ un opérateur différentiel, où λ est un nombre complexe dépendant des paramètres $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ de la façon suivante: 1) homogène d'ordre p, 2) $Re\,(\lambda)$ est strictement négative sur la sphère d'unité de E^n. Alors on a le

Lemme 1.2. *Pour tout $t\in[0,1]$ et toute fonction f, continûment différentiable dans $[0,1]$, on a une constante $c>0$ telle que*:

$$c\left[\sigma_t(f)^2+s^p\int_0^t\sigma_t(f)^2dt\right]-c^{-1}\cdot\sigma_0(f)^2\leq |D_{t,\lambda}f|_t^2+s^p\int_0^t|D_{t,\lambda}f|_t^2\,dt$$

où $s^2=\sum\xi_j^2$ *et* $\sigma_t(f)^2=|D_{t,\lambda}f|_t^2+s^p|f|_t^2$.

2. Inégalité d'énergie. Nous commençons par donner quelques définitions. $\sigma^{k,q}(f;\,U)=\sum\int_U D^\alpha f\cdot\overline{D^\alpha f}\,dU$, où la somme s'étend sur tout α avec $|\alpha|_p\leq kp+q$ et qu'on prend comme U divers espaces convenables. $\mathcal{E}^{k,q}(\mathcal{D})$ est un espace hilbertien formé des fonctions mesurables dans $\mathcal{D}$, muni du produit scalaire $\sigma^{k,q}(f,g;\mathcal{D})$ déduit de la norme $\sigma^{k,q}(f;\mathcal{D})$. Soit $\mathcal{B}(x,D)$ un opérateur différentiel défini par $\mathcal{B}(x,i\xi)=-iD_{\xi_0}\cdot\mathcal{A}(x,i\xi)$, qui est, comme on voit facilement, un opérateur p-parabolique d'ordre m. Soit $\tau_q=\sum(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\cdot D^\alpha$ où $\alpha_0=0$ et $|\alpha|\leq q$.

Proposition 2.1. *Il existe une constante $c>0$ ne dépendant que de $|\delta|$ et des coefficients de $\mathcal{A}(x,D)$, telle que*

$$\begin{aligned}c[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f,\pi_0)^2]\\ \leq Re(\mathcal{A}f,\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t)\end{aligned}$$

pour tout t et tout $f\in\mathcal{C}^{m+1,0}(\mathcal{D})$.

Grâce à une partition de l'unité, la démonstration se ramène au cas d'une équation à coefficients constants.

Remarque. Nous ne précisons pas dans la suite que la constante c ne dépend que de $|\delta|$ et des coefficients de $\mathcal{A}(x,D)$.

Soit $\mathcal{A}(D)$ un opérateur différentiel p-parabolique à coefficients constants, ne contenant que la partie principale. Alors on a le

Lemme 2.1. *Pour tout $f\in\mathcal{C}^{m+1,0}(\mathcal{D})$, il existe une constante $c>0$, telle que*

$$\begin{aligned}c[\sigma^{m,0}(f;\pi_t)^2+\sigma^{m,p/2}(f;\mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m,0}(f;\mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m,0}(f;\pi_0)^2]\\ \leq Re(\mathcal{A}f,\mathcal{B}f;\mathcal{D}_t).\end{aligned}$$

Démonstration. Désignons par $f \to \hat{f}$ la transformation de Fourier par rapport aux coordonnées spatiales $x'=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$: $f(t, \xi')=(2\pi)^{-n}\int f(t, x')\exp(-i\sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j)\,dx'$, où nous écrivons t au lieu de x_0. En vertu du théorème de Parseval, l'intégrale $Re(\mathcal{A}(D)f, \mathcal{B}(D)f; \mathcal{D}_t)$ peut s'écrire comme suit:

$$Re(\mathcal{A}(D)f, \mathcal{B}(D)f; \mathcal{D}_t)=\int_{\hat{\mathcal{D}}_t} (D_t - Re\cdot\lambda_k)|\prod_{j\neq k}(D_t-\lambda_j)\hat{f}|^2\cdot d\hat{\mathcal{D}}_t$$

où $\hat{\mathcal{D}}_t$ est une bande dans E^{n+1} définie par $0\leq\xi_0\leq t$. Remarquons maintenant que $Re(\lambda_j)$ est strictement négatif sur la sphère d'unité de E^n. Ainsi pour démontrer le lemme, on n'a qu'à appliquer itérativement le lemme 1.2.

Proposition 2.2. *Il existe une constante $c>0$, telle que*

$$c[\sigma^{m, r\to q+p/2}(f; \pi_t)^2+\sigma^{m, q+p}(f; \mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m, q+p/2}(f; \mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_0)^2] \leq Re(\mathcal{A}f, \tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}f; \mathcal{D}_t).$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.

Maintenant nous pouvons prouver le théorème suivant qui est l'objet de ce paragraphe.

Théorème 2.1. *Il existe une constante $c>0$, telle que*

$$\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_t)+\sigma^{m+1, q}(f; \mathcal{D}_t)\leq c[\sigma^{0, q}(\mathcal{A}f; \mathcal{D}_t)+\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_0)]$$

pour tout t et tout $f\in\mathcal{E}^{m+1, q}(\mathcal{D})$.

Démonstration. Il suffit de faite la démonstration pour $f\in\mathcal{E}^{m+1, q}\to\mathcal{C}^{m+1, q}(\mathcal{D})$. Dans la proposition 2.2, si l'on modifie le second membre à l'aide de l'inégalité de Schwarz, on a une constante $c>0$, telle que

$$c[\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_t)^2+\sigma^{m, q+p}(f; \mathcal{D}_t)^2]-c^{-1}[\sigma^{m, q+p/2}(f; \mathcal{D}_t)^2+\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_0)^2] \leq\sigma^{0, q}(\mathcal{A}f; \mathcal{D}_t)^2.$$

Le lemme 1.1 entraîne donc:

$$\sigma^{m, q+p/2}(f: \pi_t)+\sigma^{m, q+p}(f; \mathcal{D}_t)\leq c[\sigma^{0, q}(\mathcal{A}f; \mathcal{D}_t)+\sigma^{m, q+p/2}(f; \pi_0)].$$

D'autre part $D_t^{m+1}f=\mathcal{A}f+\sum\mathcal{A}_{\alpha'}(x)D^{\alpha'}f$ avec $\alpha'_0\leq m$ et $|\alpha'|_p\leq (m+1)p$, donc le théorème se trouve démontré.

3. Différentiabilité. La régularité de la solution se démontre par suite de localisation de l'inégalité d'énergie. Soit Ω un ouvert relativement compact contenu dans l'intérieur de $\mathcal{D}$; Ω_0 est une partie compacte de Ω. Désignons par J_ε un régularisateur dépendant d'un paramètre ε. Alors on a le

Théorème 3.1. *Soient $f\in\mathcal{E}^{m+1, 0}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{A}f\in\mathcal{E}^{0, q}(\mathcal{D})$, alors on a une inégalité de la forme suivante*:

$$c\cdot\sigma^{m+1, q}(J_\varepsilon f; \Omega_0)-c^{-1}\cdot\sigma^{m+1, 0}(f; \Omega)\leq\sigma^{0, q}(\mathcal{A}f; \Omega)$$

où c est une constante dépendant de q, Ω_0 et Ω.

La démonstration se fait par l'induction sur le nombre q. La réflexivité de l'espace hilbertien entraîne la compacité faible de ses parties bornées. Le fait que $\{J_\varepsilon f\}$ forme une famille bornée par rapport à la semi-norme $\sigma^{m+1,q}(J_\varepsilon f, \Omega_0)$, est équivalent à dire que, pour chaque α avec $\alpha_0 \leq m+1$, $|\alpha|_p \leq (m+1)p+q$, $\{D^\alpha J_\varepsilon f\}$ est une famille bornée dans $L^2(\Omega_0)$. Donc on peut en extraire une sous famille convergent vers un element de $L^2(\Omega_0)$, qui coïncide avec la dérivée $D^\alpha f$ au sens de distribution. C'est ainsi qu'on peut voir, grâce au théorème de Sobolev, la régularité de la solution.

4. Inégalité duale. Soit $\mathcal{H}^{k,q}$ l'adhérence dans $\mathcal{E}^{k,q}$ de C_0^∞, sous ensemble de $\mathcal{E}^\infty \to C^\infty(\mathcal{D})$, formé des fonctions s'annulant au voisinage de π_0; soit $\mathcal{H}^{-k,-q}$ l'espace dual de $\mathcal{H}^{k,q}$, mis en dualité par la forme bilinéaire $\langle f, \varphi \rangle$, qui est l'extension de l'intégrale $\int_{\mathcal{D}} f \cdot \bar{\varphi}\, d\mathcal{D}$ pour $f \in \mathcal{H}^{k,q}$, $\varphi \in L^2$. $\sigma^{0,q}(\varphi; \mathcal{D}) = \sup_{f \in C_0^\infty} |\langle f, \varphi \rangle| |\sigma^{0,q}(f; \mathcal{D})|^{-1}$ est une norme dans $\mathcal{H}^{0,-q}$. De ce que $\mathcal{H}^{0,q}$ est un espace hilbertien, il existe une application isométrique de $\mathcal{H}^{0,-q}$ sur $\mathcal{H}^{0,q}$, que nous désignons par $\mathcal{U}$. Cette application nous permet de définir $\sigma^{0,-q}(\varphi: \pi_t)$ par $\sigma^{0,q}(\mathcal{U}\varphi; \pi_t)$, $\varphi \in \mathcal{H}^{0,-q}$, qui a évidemment le sens pour presque tout t. Soit $\mathcal{A}^*$ l'application transposée de $\mathcal{A}$, application de $\mathcal{H}^{0,-q}$ dans $\mathcal{H}^{-m-1,-q}$, qui coïncide avec $\mathcal{A}^* \cdot \varphi = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\bar{\mathcal{A}}_\alpha \cdot \varphi)$ pour une fonction φ suffisamment régulière s'annulant au voisinage de π_1.

Posons $\sigma^{-m,-q-p}(\mathcal{A}^*\varphi; \mathcal{D}_t^*) = \sup_{f \in C_t^\infty} |\langle \mathcal{A} f, \varphi \rangle| |\sigma^{m,q+p}(f, \mathcal{D}_t^*)|^{-1}$, où C_t^∞ signifie sous famille de $C^\infty(\mathcal{D})$, dont les éléments s'annulent au voisinage de $\mathcal{D}_t$.

Théorème 4.1. *On a une constante $c>0$, telle que*

$$\sigma^{0,-q+p/2}(\varphi; \pi_t) + \sigma^{0,-q}(\varphi; \mathcal{D}_t^*) \leq c \cdot \sigma^{-m,-q-p}(\mathcal{A}^*\varphi; \mathcal{D}_t^*)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{H}^{0,-q}$ et presque tout t.

Démonstration. Remarquons qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{E}^{0,q+p}$ satisfaisant à $\tau_{p/2} \cdot g = \mathcal{U}\varphi$. Maintenant l'application $\mathcal{U}$ nous permet d'écrire l'inégalité ci-dessus sous forme équivalente:

$$\sigma^{0,q+p/2}(g; \pi) + \sigma^{0,q+p}(g; \mathcal{D}_t^*) \leq c \cdot \rho(t) \qquad \text{p.p}$$

où $\rho(t) = \sup_{f \in C_t^\infty} \sigma^{0,q}(\mathcal{A} f, \tau_{p/2} \cdot g; \mathcal{D}_t^*) |\sigma^{m,q+p}(f; \mathcal{D}_t^*)|^{-1}$.

Suivant le raisonnement de M. Gårding, il suffit de démontrer cette inégalité pour $g \in \mathcal{E}^{1,q}$, indéfiniment différentiable et de plus s'annulant au voisinage de π_1.

Servons nous de l'induction sur l'ordre de l'opérateur $\mathcal{A}(x, D)$. Pour le cas où $m=0$, la démonstration est facile. Soit $\mathcal{L}^*$ un opérateur différentiel p-parabolique d'ordre m, à coefficients constants. $\mathcal{L}$ est son adjoint formel, qui est donc p-antiparabolique. Selon l'hypothèse, il existe une fonction indéfiniment différentiable $h \in \mathcal{E}^{m+1,q}$, s'annulant au voisinage de π_1, qui satisfait à $\mathcal{L} \cdot h = g$. (C'est une conséquence immédiate du théorème 4.2 appliqué à $\mathcal{L}$, si l'on fait le changement $t \to -t$.)

Maintenant on a:

$$|\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \tau_{p/2}\mathcal{L}h; \mathcal{D}_t^*)-\sigma^{0,q}(\mathcal{A}^*\bar{h}, \tau_{p/2}\mathcal{L}^*\bar{f}; \mathcal{D}_t^*)| \leq c_1\sigma^{m,q+p}(f; \mathcal{D}_t^*)\cdot\sigma^{m,q+p-1}(h; \mathcal{D}_t^*)$$

pour une constante convenable c_1.

D'autre part on a:

$$\sigma^{0,q}(\mathcal{A}f, \tau_{p/2}\cdot\mathcal{L}h; \mathcal{D}_t^*)\leq\rho(t)\cdot\sigma^{m,q+p}(f; \mathcal{D}_t^*). \qquad \forall f\in C_t^\infty$$

Il en résulte donc:

$$\sigma^{0,q}(\mathcal{A}^*\bar{h}, \tau_{p/2}\cdot\mathcal{L}^*\bar{f}; \mathcal{D}_t^*)\leq\sigma^{m,q+p}(f; \mathcal{D}_t^*)[\rho(t)+c_1\sigma^{m,q+p-1}(h; \mathcal{D}_t^*)].$$

D'après le théorème 4.2, $\mathcal{L}^*C_t^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}^{0,q+p}(\mathcal{D}_t^*)$; donc il existe une suite (f_j) des éléments $\in C_t^\infty$, qui converge vers $\mathcal{B}^*\bar{h}$ au sens de la topologie de $\mathcal{H}^{0,q+p}(\mathcal{D}_t^*)$. En se servant de l'inégalité d'énergie pour l'opérateur $\mathcal{L}^*$ dans $\mathcal{D}_t^*$, on obtient:

$$\overline{\lim}\cdot\sigma^{m,q+p}(f_j; \mathcal{D}_t^*)\leq c_2\sigma^{0,q+p}(\mathcal{B}^*\bar{h}; \mathcal{D}_t^*).$$

Ces inégalités entraînent:

$$\sigma^{0,q}(\mathcal{A}^*h, \tau_{p/2}\cdot\mathcal{B}^*\bar{h}; \mathcal{D}_t^*)\leq c_2\cdot\sigma^{m,q+p}(\bar{h}, \mathcal{D}_t^*)[\rho(t)+c_1\sigma^{m,q+p-1}(\bar{h}, \mathcal{D}_t^*)].$$

Ainsi en remarquant que $\mathcal{A}^*$ est un opérateur p-antiparabolique, le même argument dont nous sommes servis dans le paragraphe 2 entraîne:

$$\sigma^{m,q+p/2}(\bar{h}; \pi_t)+\sigma^{m,q+p}(\bar{h}; \mathcal{D}_t^*)\leq c\rho(t).$$

Parce que $g=\mathcal{L}\cdot h$, ce n'est que l'inégalité cherchée.

Théorème 4.2. *L'application $\mathcal{A}(x, D)$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+1,q}(\mathcal{D})$ sur $\mathcal{H}^{0,q}(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Le théorème 2.1 montre que $\mathcal{A}(x, D)$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}^{m+1,q}$ dans $\mathcal{H}^{0,q}$. Donc l'image $\mathcal{A}\cdot\mathcal{H}^{m+1,q}$ est fermée dans $\mathcal{H}^{0,q}$. D'autre part, le théorème 4.1 fournit comme cas particulier que $\mathcal{A}C_0^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}^{0,q}$. c.q.f.d.

Le théorème 4.2 montre une autre voie pour résoudre le problème de Cauchy, qui a été déjà démontré par M. S. Mizohata [7] et M. S. D. Eidelman [2].

Références

[1] F. Browder: Parabolic systems of differential equations with time dependent coefficients, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **42**, 914-916 (1956).

[2] S. D. Eidelman: Fundamental solution for parabolique equations, Math. Sb. (1956).

[3] L. Gårding: Solution directe du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, Colloque International du C. N. R. S. sur la Théorie des Equations aux Dérivées Partielles, 71-89 (1956).

[4] ——: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., **1**, 55-72 (1953).

[5] J. Leray: Lecture on hyperbolic equation with variable coefficients, Inst. for Adv. Study, Princeton (1952).

[6] O. A. Ledyzenskaja: Sur la solution des problèmes aux limites pour les équations de type parabolique et hyperbolique, Dokl. Ak. Nauk URSS, 97.3, 395-398 (1954).

[7] S. Mizohata: Sur le problème de Cauchy pour l'équation différentielle p-parabolique, Jour. Math. Soc. Japan, **8** (1956).
[8] I. G. Petrowsky: On the problem of Cauchy for a system of linear partial differential equation in the domain of non analytic functions, Bull. Univ. d'Etat Moscou, sér. A, no. 7, 1–72 (1938).
[9] L. Schwartz: Théorie des Distributions, I–II, Hermann, Paris (1950–1951).