151. *Sur les Correspondances Algébriques*

Par Hirobumi MIZUNO
Institut Mathématique, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Dec. 12, 1958)

La théorie des correspondances sur une courbe est étudiée par Hurwitz, Severi, Costelnuovo, Lefschetz, etc., et plus récemment Weil en a développé la théorie abstraite. Mais quant à la théorie des correspondances sur une variété de dimension quelconque, il semble peu avancée. Ici nous considérons cette question et en donnons quelques résultats.

§ 1. Nous suiverons la terminologie et les notations de Weil [4–6]. Soit f une fonction définie sur une variété V à valeurs dans une variété abélienne A; alors si $\mathfrak{m}=\sum_\nu a_\nu P_\nu$ est un cycle de dimension 0 sur V, nous désignerons par $f(\mathfrak{m})$ le point $\sum_\nu a_\nu f(P_\nu)$ sur A (au lieu de $S[f(\mathfrak{m})]$).

D'abord nous citons le théorème suivant dû à Matsusaka [2]. *Soit V une variété projective sans point multiple, de l'irrégularité q. Alors it existe une variété abélienne A^q de dimension q et une fonction φ définie sur V à valeurs dans A, ayant les propriétés suivantes: Pour chaque fonction f définie sur V à valeurs dans une variété abélienne B, il existe un homomorphisme ρ de A dans B tel que $f=\rho\circ\varphi+a$, a étant une constante. ρ et a sont déterminés d'une manière unique par f. De plus, si $\mathfrak{m}$ est un cycle de dimension 0 sur V, on a*

$$f(\mathfrak{m})=\rho[\varphi(\mathfrak{m})]+\deg(\mathfrak{m})\cdot a.$$

Si k est un corps commun de définition pour V, A, B et f, alors ρ est défini sur k.

La variété abélienne A dans le théorème ci-dessus est appelée la variété d'Albanese attachée à V. Nous conviendrons de nommer φ la fonction canonique sur V.

§ 2. Nous introduisons la notion de l'équivalence rationnelle suivant P. Samuel [3]:

DÉFINITION. Soit V^n une variété projective sans point multiple. On dit qu'un cycle X^r sur V est rationnellement équivalent à 0 s'il existe une variété rationnelle R^m sans point multiple, un cycle Z^{m+r} sur $V\times R$ et deux points a et b sur R tels que $Z(a)=pr_v[Z(V\times a)]$ et $Z(b)$ soient définis et que $X=Z(a)-Z(b)$.

Nous rappelons qu'une variété R est dite rationnelle si le corps absolu des fonctions sur R est un sous-corps d'une extension purement transcendante du domaine universel. Nous désignons par $R_r(V)$ l'ensemble des cycles de dimension r sur V qui sont rationnellement équivalents à 0. $R_r(V)$ forme un groupe additif [3, Théorème 1]. Si X^r est dans $R_r(V)$ on écrira $X\sim 0$.

THÉORÈME 1. *Soient A une variété abélienne, V une variété projective sans point multiple, et f une fonction définie sur V à valeurs dans A; et soit $\mathfrak{m}$ un cycle de dimension 0 sur V. Alors la relation $\mathfrak{m}\sim 0$ sur V entraîne $f(\mathfrak{m})=0$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{m}\sim 0$, il existe, d'après le Théorème 2 de [3], deux points a et b sur la ligne projective S^1 et un cycle T sur $V\times S^1$ tels que $T(a)=pr_v[T(V\times a)]$ et $T(b)$ soient définis et $\mathfrak{m}=T(a)-T(b)$. Soit k un corps de définition pour A, V, f, par rapport auquel T soit rationnel; soit t une quantité variable sur le corps k; posons $\mathfrak{n}=T(t)$, et $u=f(\mathfrak{n})$. Comme $\mathfrak{n}$ est rationnel par rapport à $k(t)$, il en est de même de $u=f(\mathfrak{n})$; donc on peut écrire $u=F(t)$. F étant une fonction définie sur S^1, à valeurs dans A, ayant k pour corps de définition. D'après le Théorème 8 de [6], F est constante, et a pour valeur un point c de A, rationnel par rapport à k. Mais, d'après le Théorème 13 de [4, VII-6], $T(a)$ et $T(b)$ sont les spécialisations, uniquement déterminées, de $\mathfrak{n}$, sur $t\to a$ et sur $t\to b$ respectivement, par rapport à k. On a donc, $f[(T(a)]=f[T(b)]=c$, et par conséquent $f(\mathfrak{m})=0$.

§ 3. Maintenant, nous abordons les correspondances algébriques entre deux variétés.

Soient V^n, V' deux variétés projectives sans points multiples; par une correspondance entre V et V' on entend un cycle X sur le produit $V\times V'$; une correspondance entre une variété V et elle-même s'appelle aussi une correspondance sur V. Nous conviendrons de dire qu'une correspondance X entre V et V' est dégénérée si les projections sur V de toutes ses composantes sont de dimension inférieure à $n=\dim V$.

Dans la suite nous considérons seulement les correspondances de dimension n. Soit donc X une telle correspondance entre V et V'; alors, on peut, d'une manière unique, écrire X sous la forme $X=X_0+X_1+V\times\mathfrak{b}$, X_1 étant une correspondance dégénérée, $\mathfrak{b}$ un cycle de dimension 0 sur V' et X_0 une correspondance dont toutes les composantes ont les projections V sur V et aucunes composantes ne sont pas de la forme $V\times Q$ avec un point Q sur V'. Posons $\overline{X}=X_0+V\times\mathfrak{b}$. Alors, si P est un point quelconque sur V tel que $\overline{X}(P\times V')$ soit définie, on désignera par $X(P)$ le cycle de dimension 0 sur V, definie par

$$\overline{X}(P\times V')=P\times X(P).$$

Si $\mathfrak{m}$ est un cycle de dimension 0 sur V, $X(\mathfrak{m})$ est définie par linéarité:

$$X(\mathfrak{m})=pr_v[\overline{X}(\mathfrak{m}\times V)].$$

Soit X une correspondance entre V et V'. On écrira $X\simeq 0$ s'il existe une correspondance dégénérée X_1 et un cycle $\mathfrak{b}$ de dimension 0 sur V' tels que

$$X \sim X_1 + V \times \mathfrak{b}$$

au sens de l'équivalence rationnelle sur $V \times V'$.

THÉORÈME 2. *Soient V et V' deux variétés projectives sans point multiple, A et A' leurs variétés d'Albanese, φ et φ' les fonctions canoniques sur V et V' respectivement. Alors, si X est une correspondance entre V et V', il existe une fonction f définie sur V à valeurs dans A', telle que l'on ait, quelque soit P le point sur V:*

$$f(P) = \varphi'[X(P)].$$

De plus, il existe un homomorphisme ρ_x de A dans A', un point a' de A' tels que l'on ait, quel que soit le cycle $\mathfrak{m}$ de dimension 0 sur V:

$$\varphi'[X(\mathfrak{m})] = \rho_x[\varphi(\mathfrak{m})] + \deg \mathfrak{m} \cdot a'.$$

Démonstration. Soit k un corps de définition pour V, V', A, A', φ et φ', par rapport auquel X soit rationnel; soit d'abord P un point générique de V par rapport à k. D'après le Théorème 12 de [4, VII-6], le cycle $X(P \times V)$ est définie et le cycle $X(P)$ est rationnel par rapport à $k(P)$, donc le point $\varphi'[X(P)]$ est aussi rationnel par rapport à $k(P)$, de sorte qu'on peut écrire $f(P) = \varphi'[X(P)]$. Alors d'après le Théorème 13 de [4, VII-6], cette formule reste valable pour tout point P sur V tel que $X(P \times V)$ soit défini. La seconde formule est une consequence immediate de celà et du théorème de Matsusaka cité dans § 1.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses et les notations étant celles du Théorème 2 on a $\rho_x = 0$ si $X \simeq 0$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $X \simeq 0$, c'est-à-dire $X \sim X_1 + V \times \mathfrak{b}$, X_1 étant une correspondance dégénérée et $\mathfrak{b}$ un cycle de dimension 0 sur V'. On a alors $X(P) \sim \mathfrak{b}$ d'après le Théorème 8 de [3] et par la définition de $X(P)$. Donc d'après le Théorème 1 $\varphi'[X(P)] = \varphi'(\mathfrak{b})$, de sorte que f est la constante $\varphi'(\mathfrak{b})$ et qu'on a $\rho_x = 0$.

§ 4. Dans le groupe additif $\mathfrak{G}$ des correspondances entre V et V', soit $\mathfrak{G}_r$ l'ensemble de celles qui sont $\simeq 0$; soit $\mathfrak{G}_a$ l'ensemble des correspondances X telles que $\rho_x = 0$. D'après le Théorème 4, on a $\mathfrak{G}_r \subset \mathfrak{G}_a$. Soient X et Y deux correspondances; on écrira $X \equiv Y$ si $X - Y$ est dans $\mathfrak{G}_a$. On réservera le nom d'équivalence à la relation $\equiv$; et quand il sera question de classes d'équivalence dans l'ensemble des correspondances, il faudra ici entendre par là les classes dans le groupe $\mathfrak{G}$ suivant le sous-groupe $\mathfrak{G}_a$. En conséquence, le groupe quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_a$ sera appelé le groupe additif des classes de correspondances. Le groupe quotient $\mathfrak{G}_a/\mathfrak{G}_r$ est aussi important, mais ici on ne traite pas de ce problème. Dans le cas ou V et V' sont des courbes $\mathfrak{G}_a$ et $\mathfrak{G}_r$ coïncident.

Soit ξ la classe d'une correspondance X. L'homomorphisme ρ_x dans le Théorème 2 ne depend que de ξ. Nous notons ρ_ξ l'homomorphisme ρ_x défini à partir de X. Nous désignons de plus par $\mathfrak{H}(A, A')$ le module des homomorphismes de A dans A'. L'application $\xi \to \rho_\xi$ est un monomorphismes du module des classes de correspondance dans le module $\mathfrak{H}(A, A')$. D'après le Théorème 37 de [6] no. 70, le module $\mathfrak{H}(A, A')$ possède une base finie sur l'anneau des entiers rationnels. Nous avons donc le

THÉORÈME 4. *Soit* $\mathfrak{C}(V, V')$ *le module des classes de correspondances entre* V *et* V'; *alors l'application* $\xi \to \rho_\xi$ *est un monomorphisme de* $\mathfrak{C}(V, V')$ *dans* $\mathfrak{H}(A, A')$. *En particulier, le module* $\mathfrak{C}(V, V')$ *possède une base finie sur l'anneau des entiers rationnels.*

Lorsque V et V' sont des courbes ou des variétés abéliennes, on peut montrer que le monomorphisms dans le Théorème 5 est un surjectif, donc un isomorphisme, mais en général on ne peut pas expecter cette circonstance.

Références

[1] T. Matsusaka: On the algebraic construction of the Picard variety, Jap. J. Math., **21**, 217–236 (1951).

[2] T. Matsusaka: On the algebraic construction of the Picard variety (II), Jap. J. Math., **22**, 51–62 (1952).

[3] P. Samuel: Rational equivalence of arbitrary cycles, Amer. J. Math., **78**, 383–400 (1956).

[4] A. Weil: Foundations of Algebraic Geometry, New York (1946).

[5] A. Weil: Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en Déduisent, Paris (1948).

[6] A. Weil: Variétés Abéliennes et Courbes Algébriques, Paris (1948).