

16. L'Intégration des Fonctions à Valeurs Vectorielles d'après la Méthode des Espaces Rangés

Par Hatsuo OKANO

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1959)

En utilisant la théorie des espaces rangés, Prof. K. Kunugi a introduit une nouvelle définition de l'intégrale (qu'on appelle l'intégrale (*E. R.*)) des fonctions à valeurs réelles.¹⁾ Dans la présente Note nous considérons les fonctions à valeurs vectorielles et l'intégrales (*E. R.*) de telles fonctions.

1. *Espaces vectoriels rangés.* Étant donné un espace R où la topologie est donnée par un système de voisinages satisfaisant à l'axiomes (*A*), (*B*) de F. Hausdorff,²⁾ on dit qu'il est une *espace rangé*³⁾ s'il existe une famille des voisinages \mathfrak{B}_n ($n=0, 1, 2, \dots$) qui satisfait à la condition: (a) Pour tout voisinage $v(p)$ du point p et pour tout entier positif n , il existe un entier m , $m \geq n$, tel qu'il existe un voisinage $u(p)$ appartenant à la famille \mathfrak{B}_m et qui est contenu dans $v(p)$. Un voisinage d'un point p sera dit de rang n , s'il appartient à la famille \mathfrak{B}_n .

On dit qu'un espace rangé R est un *espace vectoriel rangé réel* s'il satisfait à deux conditions suivantes:

- (1) R est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.
- (2) R est un groupe rangé⁴⁾ comme un groupe additif: tout voisinage $v(p)$ du point p de rang n est exprimable de la manière:

$$v(p) = V + p,^{5)}$$

où V est un voisinage du point 0 de rang n .

Étant donné un espace vectoriel rangé réel, pour une suite monotone décroissante de voisinages

$$V_0 + p_0 \supseteq V_1 + p_1 \supseteq \dots \supseteq V_n + p_n \supseteq \dots,$$

on dit qu'elle est *fondamentale* si elle satisfait à deux conditions suivantes:

- (1) $V_n \in \mathfrak{B}_{\gamma_n}$, $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots$;
- (2) $p_{2n} = p_{2n+1}$.

1) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956); H. Okano: (*ER*)-integral of Radon-Stieltjes type, *ibid.*, **34**, 580-584 (1958).

2) F. Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 213 (1914).

3) Pour la terminologie concernant à l'espace rangé, cf. K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, II, Proc. Japan Acad., **30**, 553-556, 912-916 (1954); H. Okano: Some operations on the ranked spaces, *ibid.*, **33**, 172-176 (1957). Dans la présente Note nous ne considérons que le cas où $\omega_\nu = \omega_0$.

4) Voir H. Okano: *Loc. cit.* dans 3).

5) $V + p$ désigne l'ensemble de tous les points $q = r + p$ tels que $r \in V$.

On dit qu'un espace vectoriel rangé réel est *complet* si, pour toute suite fondamentale $\{V_n + p_n\}$, l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} I(V_n + p_n)$ ⁶⁾ n'est pas vide.⁷⁾

On dit aussi qu'une suite des points $\{p_n\}$ dans un espace vectoriel rangé réel est *fondamentale* s'il existe une suite fondamentale des voisinages $\{V_n + p_n\}$. On dit qu'un point p est *point limite* de $\{p_n\}$ si $p \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I(V_n + p_n)$. p est désigné par $p = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n$. Soient $\{p_n\}, \{q_n\}$ deux suites fondamentale. On appelle qu'elles satisfont à la relation $\{p_n\} \geq \{q_n\}$ lorsqu'il existe les suites fondamentales $\{U_n + p_n\}, \{V_n + q_n\}$ telles que, pour tout n ($n=0, 1, 2, \dots$), il existe un indice m tel que $V_m + q_m \subseteq U_n + p_n$. Une famille u^* des suites fondamentales des points s'appelle une *collection maximale* lorsqu'elle satisfait à deux conditions suivantes: (1) Pour deux suites fondamentales u, v de u^* , il existe une suite fondamentale w de u^* telle qu'on ait à la fois $u \geq w$ et $v \geq w$; (2) Il n'existe aucune famille des suites fondamentales qui satisfait à la condition (1) et qui contient u^* comme sous-famille stricte.

Pour un espace vectoriel rangé réel, nous considérons l'axiome suivante:

(VRT) Si p est un point différent du point 0, pour tout entier positif k , il existe un entier positif n qui jouit de la relation $p \notin Co\left(\sum_{i=1}^k (I(V_i) - I(V_i))\right)$ ⁸⁾ si $V_i, i=1, 2, \dots, k$, est un voisinage du point 0 tel que le rang de $V_i > n$.

Dans un espace vectoriel rangé réel complet satisfaisant à l'axiome (VRT), l'ensemble de tout point limite d'une suite fondamentale se réduit à un point.

Exemple 1. Soit R un espace (\mathfrak{E}): un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable et complet sur le corps des nombres réels.⁹⁾ Alors, il existe un système fondamental $V_n, n=0, 1, 2, \dots$, de voisinages du point 0 satisfaisant aux conditions suivantes: (1) Tout ensemble V_n est convexe, équilibré et absorbant; (2) Pour tout $n, V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$; (3) L'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$ est réduite au point 0. Posons \mathfrak{B}_n = la famille de tous les voisinages $V_n + p$ de tous les points $p \in R$. Alors, R est un espace vectoriel rangé réel complet qui satisfait à l'axiome (VRT).

6) $I(A)$ désigne l'intérieur de l'ensemble A .

7) Dans la Note précédente, nous avons dit plus généralement complet un espace rangé tel que, pour toute suite fondamentale $\{V_n + p_n\}$, $\bigcap_n (V_n + p_n) \neq 0$. Dans la suite, nous supposons que R soit complet au sens strict. Mais, pour un espace complet au sens général, on obtient des résultats analogues par quelques modifications simples.

8) $A \pm B$ désigne l'ensemble de tous les points $p = q \pm r$ tels que $q \in A$ et $r \in B$. $Co(A)$ désigne le plus petit ensemble convexe contenant l'ensemble A .

9) Voir N. Bourbaki: *Espaces Vectoriels Topologiques*, Paris (1953).

Exemple 2.¹⁰⁾ Soit R l'espace à m dimensions. Soit l_0 un nombre positif fixé. Le voisinage $V_{l,n}(p)$, où l est un nombre positif tel que $l > l_0$ et n un entier non négatif, du point $p = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ est l'ensemble de tous les points $q = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ qui satisfont à trois conditions suivantes: (1) $0 \leq (x_1 - \xi_1)^2 - \sum_{i=2}^m (x_i - \xi_i)^2 < 2^{-n}$; (2) $x_1 - \xi_1 \geq 0$; (3) $\sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i)^2 < l^2$. Posons $\mathfrak{B}_n =$ la totalité des voisinages $V_{l,n}(p)$ de tous points p . Alors, R est un espace vectoriel rangé réel complet qui satisfait à l'axiome (VRT).¹¹⁾

2. *Complétion de l'espace de toutes fonctions en escalier.* Soient X un ensemble; \mathfrak{B} une algèbre complètement additive des sous-ensembles de X (qu'on appelle ensembles mesurables) telle que $X \in \mathfrak{B}$; μ une mesure (non négative) définie sur \mathfrak{B} telle que $\mu(X) = 1$.¹²⁾ Soit R un espace vectoriel rangé réel complet satisfaisant à l'axiome (VRT). Une fonction $f = f(x)$ de X dans R est dite en escalier si elle est expérimentable de la manière:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(x) p_i, \quad p_i \in R,$$

où $\chi_{E_i}(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable E_i . L'intégrale de la fonction en escalier est définie par

$$\int_x f(x) d\mu = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) p_i.$$

Nous désignons par $\mathfrak{E}(X, R)$ la famille de toutes les fonctions en escalier identifiant deux fonctions qui ne sont pas différentes que sur un ensemble de mesure nulle. Nous allons introduire une topologie et un rang dans $\mathfrak{E}(X, R)$. Étant donné un voisinage V du point 0 de R et un ensemble mesurable F , $W(F, V)$ désigne la famille de toutes les fonctions en escalier $g = g(x)$ qui jouissent de deux conditions suivantes:

(1) $g(x) \in V$ presque partout dans F ; (2) $\int_x g(x) d\mu \in V$. Le système

des voisinages de f , $f \in \mathfrak{E}(X, R)$, sera formé de tous les ensembles $W(F, V) + f$. Alors, il jouit des axiomes (A), (B) de F. Hausdorff. Posons $\mathfrak{B}_n =$ la famille de tous les voisinages $W(F, V) + f$, $f \in \mathfrak{E}(X, R)$, qui satisfont à deux conditions suivantes: (1) V est de rang n dans R ; (2) $\mu(X - F) < 2^{-n}$. Alors, $\mathfrak{E}(X, R)$ est un espace vectoriel rangé réel qui satisfait à l'axiome (VRT).

10) Cf. M. Riesz: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math., **81**, 26 (1949); T. Shirai: A remark on the ranked space. II, Proc. Japan Acad., **33**, 139-142 (1957).

11) R n'est pas un espace topologique au sens classique. Cf. F. Hausdorff: Loc. cit.; C. Kuratowski: Topologie, I, Warszawa, 20 (1948); N. Bourbaki: Topologie Générale, Paris, 9 (1951).

12) Pour la terminologie concernant à la mesure, voir, par exemple, P. R. Halmos: Measure Theory, New York (1950).

Cela posé, nous pouvons démontrer la

Proposition 1. Soit $\{f_n\}$ une suite fondamentale dans $\mathfrak{E}(X, R)$. Alors, pour presque tout x de X , $\{f_n(x)\}$ est une suite fondamentale dans R . Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ appartiennent à la même collection maximale, on a $\widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ presque partout dans X .

Ainsi, si nous identifions deux fonctions qui ne sont pas différentes que sur un ensemble de mesure nulle, toute collection maximale u^* dans $\mathfrak{E}(X, R)$ détermine une fonction f de X dans R . Nous désignons cette fonction f par $J(u^*)$.

On dit qu'une fonction f de X dans R est *mesurable* s'il existe une collection maximale u^* telle que $J(u^*) = f$. Au cas où R serait l'espace des nombres réels, notre terminologie est identique à celle prise au sens de Lebesgue. Nous désignons par $\mathfrak{M}(X, R)$ la famille de toutes les fonctions mesurables de X dans R .

D'autre part, nous pouvons démontrer la

Proposition 2. Soit $\{f_n\}$ une suite fondamentale. Alors, $\left\{ \int_X f_n(x) d\mu \right\}$ est une suite fondamentale dans R . Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ appartiennent à la même collection maximale, on a $\widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu$.

Donc, pour toute collection maximale u^* , nous pouvons définir $I(u^*)$ par $I(u^*) = \widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu$, $\{f_n\} \in u^*$.

Nous désignons par \mathcal{C} la famille de toutes collections maximales dans $\mathfrak{E}(X, R)$. Soient R un espace (δ) ,¹³⁾ μ une mesure satisfaisant à la condition suivante:

(*) Quel que soit E un ensemble de mesure positive, pour tout nombre positif λ tel que $\lambda < \mu(E)$, il existe un ensemble F tel que $\mu(F) = \lambda$ et qui est contenu dans E .

Alors, \mathcal{C} est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels; par suite, l'application $T: T(u^*) = (J(u^*), I(u^*))$ est une application linéaire de l'espace vectoriel \mathcal{C} dans le produit des espaces vectoriels $\mathfrak{M}(X, R)$ et R . De plus, dans ce cas, non seulement une collection maximale u^* détermine la fonction mesurable $f = J(u^*)$ et le point $p = I(u^*)$, mais encore u^* est déterminée par la fonction f et le point p . Par suite, T est un isomorphisme de \mathcal{C} dans $\mathfrak{M}(X, R) \times R$.

Soit $\sigma: F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n \subseteq \dots$ une suite monotone croissante des ensembles mesurables telle que $0 < \mu(X - F_n) < 2^{-n}$; alors, pour tout $p \in R$, $\delta_\sigma(p) = \left\{ \frac{1}{\mu(X - F_n)} \chi_{(X - F_n)}(x)p \right\}$ est une suite fondamentale. Nous désignons par $\delta^*(p)$ la collection maximale qui contient $\delta_\sigma(p)$. Alors, on

13) R est muni du rang introduit en Exemple 1.

a $J(\delta^*(p))=0$ et $I(\delta^*(p))=p$. En conséquence, on obtient le

Théorème. Soient R un espace (\mathfrak{F}) ; μ une mesure définie sur une algèbre complètement additive des sous-ensembles d'un ensemble X telle que $\mu(X)=1$ et jouissant de la condition (*). Alors, l'application $T: T(u^*)=(J(u^*), I(u^*))$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel réel \mathcal{C} sur le produit des espaces vectoriels réels $\mathfrak{M}(X, R)$ et R .

Or, nous allons introduire une topologie et un rang dans \mathcal{C} . Étant donné un voisinage V du point 0 de R et un ensemble mesurable F , $W^*(F, V)$ désigne la famille de toutes les collections maximales v^* qui jouissent de deux conditions suivantes: (1) $J(v^*)(x) \in V$ presque partout dans F ; (2) $I(v^*) \in V$. Le système des voisinages de u^* , $u^* \in \mathcal{C}$, sera formé de tous les ensembles $W^*(F, V) + u^*$. Posons $\mathfrak{B}_n =$ la famille de tous les voisinages $W^*(F, V_n) + u^*$, $u^* \in \mathcal{C}$, qui satisfont à la condition: $\mu(X - F) < 2^{-n}$

Alors, \mathcal{C} est un espace vectoriel rangé réel complet qui satisfait à l'axiome (VRT). Pour toute fonction en escalier f , nous désignons par f^* la collection maximale qui contient la suite fondamentale $\{f_n = f\}$. Désignons par \mathcal{C}_0 la famille de toutes f^* .

Alors, \mathcal{C}_0 est partout dense dans \mathcal{C} : pour toute u^* , $u^* \in \mathcal{C}$, il existe une suite fondamentale $\{f_n^*\}$ dans \mathcal{C} telle que $\widetilde{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n^* = u^*$. De plus, l'espace rangé $\mathfrak{E}(X, R)$ est identique à \mathcal{C}_0 muni du rang induit par le rang de \mathcal{C} .¹⁴⁾

3. **Définition de l'intégrale.** Revenant au cas général, nous supposons encore que R et μ satisfassent aux conditions exposées au début de Section 2. Nous disons qu'une suite fondamentale $\{f_n\}$ dans $\mathfrak{E}(X, R)$ jouit de la propriété P^* s'il existe une suite fondamentale des voisinages $\{W(F_n, V_n) + f_n\}$ qui satisfait à trois conditions suivantes: (1) Pour tout n , on a $\mu(F_n - F_{n+1}) = 0$; (2) Il existe un entier positif k (indépendante de n) qui satisfait à l'inégalité: $k\mu(X - F_{n+1}) \geq (X - F_n) > 0$; (3) Il existe un entier positif N et une suite des entiers positifs $\phi(n)$ qui jouissent de deux conditions suivantes: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = \infty$; (ii) Quels que soient m un entier positif et $n \geq N$, pour tout ensemble A tel que $\mu(A) < m\mu(X - F_n)$, il existe m voisinages V_i , $i=1, 2, \dots, m$, du point 0 de rang $\phi(n)$ tels que $\int_A f_n(x) d\mu \in \text{Co} \left(\sum_{i=1}^m (I(V_i) - I(V_i)) \right)$.

Désignons par \mathcal{G} la famille de toutes les collections maximales qui contiennent au moins une suite fondamentale jouissant de la propriété P^* . Alors, dans la famille \mathcal{G} , le point $I(u^*)$ est déterminé non seulement par u^* mais encore par la fonction $J(u^*)$. En posant $J(u^*) = f$, $u^* \in \mathcal{G}$, nous pouvons donc écrire

14) H. Okano: On closed subspaces of the complete ranked spaces, Proc. Japan Acad., **33**, 336-337 (1957).

$$I(u^*) = \int_x f(x) d\mu.$$

Ainsi, nous avons une définition de l'intégrale.¹⁵⁾

Au cas où R serait l'espace des nombres réels, notre définition de l'intégrale se réduit à celle donnée par Prof. K. Kunugi.

15) En changeant P^* en une autre dont $I(u^*)$ est déterminé par $J(u^*)$, on peut définir une autre intégrale.

Par exemple, on peut considérer, au lieu de P^* , P_1^* suivante:

(P_1^*) Il existe un entier positif N et une suite des entiers positifs $\phi(n)$ qui jouissent de deux conditions suivantes:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = \infty$; (2) Quel que soit $n \geq N$, pour tout ensemble A tel que $\mu(A) < 2^{-n}$,

il existe un voisinage V du point 0 de rang $\phi(n)$ tel que $\int_A f_n(x) d\mu \in Co(I(V) - I(V))$.

À titre d'autre exemple, au cas où R serait l'espace des nombres réels et μ la mesure de Lebesgue dans la intervalle (a, b) telle que $a < c < b$, on a l'intégrale principale de Cauchy en remplaçant P^* par P_2^* suivante:

(P_2^*) (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c-2^{-n}}^{c+2^{-n}} f_n(x) d\mu = 0$; (2) Il existe une suite fondamentale $\{W(F_n, V_n)$

$+f_n\}$ telle que $X - F_n \in (c - 2^{-n}, c + 2^{-n})$.