106. Une Généralisation d'un Théorème de Fatou concernant l'Intégrale de Poisson

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1959)

On sait[1] qu', étant donnée une fonction $f(\theta)$ sommable sur $[-\pi, \pi]$, l'intégrale de Poisson

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}f(\theta)\,d\theta$$

définit une fonction harmonique à l'intérieur du cercle-unité, et, si en un point θ_0 l'intégrale indéfinie $F(\theta)$ de $f(\theta)$ admet une dérivée $F'(\theta_0)$, tend vers $F'(\theta_0)$ quand le point (r, φ) se rapproche au point $(1, \theta_0)$, passant entre deux cordes au point $(1, \theta_0)$. Dans la présente Note, nous allons montrer que ce fait est aussi valable sous la seule condition que $f(\theta)$ soit intégrable (*E. R.*).

Pour la terminologie concernant à l'intégrale (*E. R.*), nous nous conformons à la Note de Prof. K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I.[2] Pour une fonction f intégrable (*E. R.*) dans l'intervalle $[a, b]$, une suite fondamentale $\{V(A_n, \nu_n; f_n)\}$ jouissant de la propriété P* sera dite une suite génératrice de f si $f_n(x)$ tend vers la fonction $f=f(x)$ presque partout dans l'intervalle $[a, b]$.

Or, dans le but d'exclure quelques exceptions triviales, nous allons considérer la condition suivante de la suite génératrice $\{V(A_n, \nu_n; f_n)\}$:

(1) Pour tout $c\in A_n$, on a $\left|\int_a^c (f_{n+1}(x)-f_n(x))\,dx\right|<2^{-\nu_n}$.

Si une fonction $f(x)$ intégrable (*E. R.*) sur $[a, b]$ admet une suite génératrice satisfaisant à la condition (1), alors l'intégrale (*E. R.*) indéfinie $F(x)=(E.\,R.)\int_a^x f(t)\,dt$ de $f(x)$ est définie presque partout et sommable dans l'intervalle $[a, b]$. De plus, si $\varphi(x)$ jouit de la condition de Lipschitz dans $[a, b]$, alors $\varphi(x)f(x)$ est aussi intégrable (*E. R.*) et

1) P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mat., **30** (1906). Voir aussi G. C. Evans: The Logarithmic Potential, Amer. Math. Soc. Col. Pub., VI (1929).

2) K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956). Voir aussi K. Kunugi: Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Mathematics, **1**, 1–30 (1959); H. Okano: Sur les intégrales (*E. R.*) et ses applications, à paraître dans Osaka Mathematical Journal.

son intégrale peut se calculer par parties:

$$(E.\ R.)\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=F(b)\,\varphi(b)-(L)\int_a^b F(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Cela préparé, nous allons maintenant passer à l'étude sur l'intégrale de Poisson. Soit $f(\theta)$ une fonction admettant une suite génératrice sur $[-\pi,\pi]$ qui jouit de la condition (1). Alors, nous pouvons d'abord définir une fonction $g(z)$ d'une variable complexe z telle que $|z|<1$, par

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}f(\theta)\,d\theta.^{3)}$$

Ensuite, nous allons montrer que $g(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$. En effet, posons

$$g_1(z)=\frac{1}{\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z)^2}f(\theta)\,d\theta.^{3)}$$

Alors, en intégrant par parties, on a

$$\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h}-g_1(z)\right|$$

$$\leq\frac{|h|}{\pi}\left|(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z-h)(e^{i\theta}-z)^2}f(\theta)\,d\theta\right|$$

$$\leq\frac{|h|}{\pi}\left\{\left|\frac{1}{(1+z+h)(1+z)^2}\right|\left|(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta\right|\right.$$

$$\left.+(L)\int_{-\pi}^{\pi}|F(\theta)|\left|\frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-z-h)(e^{i\theta}-z)^2}\right)\right|d\theta\right\}.$$

Donc, on a $g'(z)=g_1(z)$.

Puisque l'intégrale de Poisson

$$(2)\qquad u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}(E.\ R.)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}f(\theta)\,d\theta$$

est la partie réelle de $g(z)$, *$u(r,\varphi)$ est une fonction harmonique pour $|r|<1$.*

Cela posé, nous allons démontrer le

Théorème de Fatou. *Soit $f(\theta)$ une fonction intégrable (E. R.) sur $[-\pi,\pi]$ et qui admet une suite génératrice jouissant de la condition* (1). *Si, en un point θ_0, l'intégrale (E. R.) indéfinie $F(\theta)$ de $f(\theta)$ admet une dérivée $F'(\theta_0)$, alors la fonction $u(r,\varphi)$ définie par* (2) *tend vers $F'(\theta_0)$ quand le point (r,φ) se rapproche du point $(1,\theta_0)$, passant entre deux cordes au point $(1,\theta_0)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, d'après le théorème

3) L'intégrale $(E.\ R.)$ d'une fonction à valeurs complexes $f(x)=g(x)+i\,h(x)$, où $g(x)$ et $h(x)$ sont deux fonctions à valeurs réels, est définie par $(E.\ R.)\int_a^b f(x)\,dx=(E.\ R.)\int_a^b g(x)\,dx+i\,(E.\ R.)\int_a^b h(x)\,dx$.

usuel de Fatou, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $\theta_0=0$ et $F(0)=F'(0)=0$. D'ailleurs, l'hypothèse du théorème pour la manière de rapprocher est équivalente à ce qu'il existe un nombre positif N tel que

$$|\varphi|<N(1-r). \tag{3}$$

Posons

$$F(\theta)=\theta\eta(\theta). \tag{4}$$

Alors, on a $\lim_{\theta\to 0}\eta(\theta)=0$. Ainsi, étant donné un nombre positif ε, il existe un nombre positif λ tel qu'on ait

$$|\eta(\theta)|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad |\theta|<\lambda. \tag{5}$$

De plus, il existe un nombre positif M (indépendent de θ) tel que,

$$\text{si } \frac{\lambda}{2}\leq|\theta-\varphi|\leq\pi, \text{ on ait} \left|\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\right|<M. \tag{6}$$

Posons $K=\mathrm{Min}\left(1, \frac{\varepsilon}{1+M^2}, \frac{\lambda}{2N}\right)$.

D'autre part, intégrant par parties, on a

$$|u(r,\varphi)|\leq\frac{1-r^2}{2\pi(1+r^2+2r\cos\varphi)}\left|(E.R.)\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta\right|$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left|(L)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)\sin(\varphi-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta))^2}F(\theta)\,d\theta\right|.$$

D'abord, $|re^{i\varphi}-1|<K$ entraîne $0\leq\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos\varphi}\leq2(1-r)<2\varepsilon$. Donc, en posant

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r(1-r^2)\sin(\varphi-\theta)}{(1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta))^2}F(\theta)\,d\theta=\int_{-\pi}^{\varphi-\frac{\lambda}{2}}+\int_{\varphi-\frac{\lambda}{2}}^{\varphi+\frac{\lambda}{2}}+\int_{\varphi+\frac{\lambda}{2}}^{\pi}$$
$$=I_1+I_2+I_3,$$

on a $|u(r,\varphi)|\leq\frac{1}{2\pi}\left(2\varepsilon\left|(E.R.)\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta\right|+|I_1|+|I_2|+|I_3|\right)$
pour $|re^{i\varphi}-1|<K$.

Or, $|re^{i\varphi}-1|<K$ entraîne $|I_1|+|I_3|<4\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}|F(\theta)|\,d\theta$ d'après (6).

Ensuite, posons $t=\theta-\varphi$, alors on a, en vertu de (4),

$$I_2=\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}(t+\varphi)\eta(t+\varphi)\,dt$$
$$=\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}t\eta(t+\varphi)\,dt$$
$$+\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}}\frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}\varphi\eta(t+\varphi)\,dt$$
$$=I_2^1+I_2^2.$$

Puisque $|t+\varphi|\leq|t|+|\varphi|\leq\frac{\lambda}{2}+N(1-r)<\lambda$ d'après (3), en vertu de (5), on a $|\eta(t+\varphi)|<\varepsilon$. Donc, on a

$$|I_2^1|\leq 2\varepsilon\int_0^\pi \frac{2r(1-r^2)\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}\,t\,dt$$
$$\leq\frac{4\pi r\varepsilon}{1+r}\leq 4\pi\varepsilon.$$

D'autre part, on a, en vertu de (3),

$$|I_2^2|\leq 2\varepsilon|\varphi|(1-r^2)\int_0^\pi \frac{2r\sin t}{(1+r^2-2r\cos t)^2}\,dt$$
$$\leq 4N\varepsilon(1-r)^2\left(\frac{1}{(1-r)^2}-\frac{1}{(1+r)^2}\right)\leq 4N\varepsilon.$$

Par conséquent, $|re^{i\varphi}-1|<K$ entraîne l'inégalité suivante:

$$|u(r,\varphi)|\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\left\{\left|(E.R.)\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta\right|+2\int_{-\pi}^{\pi}|F(\theta)|\,d\theta+2\pi+2N\right\}.$$

Donc, on a $\lim\limits_{\substack{r\to 1\\ |\varphi|<N(1-r).}} u(r,\varphi)=0$, c.q.f.d.

Enfin, nous nous proposons de donner un exemple.[4] Soit E une somme d'un nombre fini d'intervalles fermées $[a_i, b_i]$ $(i=1,2,\cdots,m)$: $E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}[a_i,b_i]$. Posons

$$U(E)=\bigcup_{i=1}^{m}\left(\frac{a_i+b_i}{2}-\frac{b_i-a_i}{6},\ \frac{a_i+b_i}{2}+\frac{b_i-a_i}{6}\right).^{5)}$$

Mettons $U_1(E)=U(E)$, et $U_n(E)=U\left(E-\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}U_i(E)\right)$ pour $n\geq 2$.

Posons $I=[-\pi,\pi]$. Alors, $I-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n(I)$ est l'ensemble non-dense parfait de Cantor contenu dans I, et $U_n(I)$ est une somme d'un nombre fini d'intervalles ouverts (a_i^n, b_i^n) $(1\leq i\leq i_n)$ deux à deux disjoints.

Soit $f(x)$ une fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(b_i^n-a_i^n)^2}{\left(x-\dfrac{a_i^n+b_i^n}{2}\right)\log\dfrac{\left|x-\dfrac{a_i^n+b_i^n}{2}\right|}{(b_i^n-a_i^n)}} & \text{pour } a_i^n<x<b_i^n \ \begin{pmatrix}n=1,2,3,\cdots\\ i=1,2,\cdots,i_n\end{pmatrix}\\[2ex] 0 & \text{pour } x\in I-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n(I).\end{cases}$$

Alors, $f(x)$ est une fonction intégrable $(E.R.)$ sur $[-\pi,\pi]$ et qui admit une suite génératrice jouissant de la condition (1), et on a $(E.R.)$ $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=0$. Chaque point de l'ensemble de Cantor est un point-limite de pôles de $f(x)$. Mais, l'intégrale $(E.R.)$ indéfinie $F(x)$ de $f(x)$ est dérivable presque partout dans $[-\pi,\pi]$.

---

4) À titre d'autres exemples, voir les Notes citées dans 2).

5) (a, b) désigne un intervalle ouvert.