29. Une Nouvelle Méthode pour Considérer la Série comme une Intégrale. II

Par Hatsuo OKANO
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

Si d'une suite $a: a_0, a_1, a_2, \cdots$, on en déduit une fonction $f_a(x)$, $0 \leqq x < \infty$, définie par

$$f_a(x) = a_i (i \leq x < i+1,\ i=0, 1, 2, \cdots),$$

pour que cette fonction soit sommable, il faut et il suffit que la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ soit absolument convergente.

D'autre part, par rapport à l'intégrale $(E.R.\nu)$,[1] dans la Note précédente,[2] nous avons démontré le

Théorème A. *Soit ν_0 une mesure définie par*

$$\nu_0(A) = \int_A g_0(x) dx,$$

où $g_0(x) = 2^{-i}$ $(i \leq x < i+1,\ i=0, 1, 2, \cdots)$; *alors, pour que la fonction* $f_a(x)$ *soit intégrable* $(E.R.\nu_0)$ *sur* $[0, \infty)$, *il faut et il suffit que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge. Et, dans ce cas, on a*

$$(E.R.\nu_0) \int_0^{\infty} f_a(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Mais, l'intégrale $(E.R.\nu)$ d'une fonction qui n'est pas sommable dépend en général de la mesure ν. Donc, en variant ν, nous pouvons donner quelques méthodes de sommation des séries divergentes.

Dans la présente Note, à titre d'exemples, nous allons considérer la méthode par la moyenne arithmétique et la méthode par la moyenne logarithmique.

D'abord, nous allons redonner brièvement la définition de l'intégrale $(E.R.\nu)$.

1. *Définition de l'intégrale* $(E.R.\nu)$ *sur un intervalle fini ou infini* $[a, b]$.[3]

1) Pour la définition, voir la Section 1.

2) H. Okano: Une nouvelle méthode pour considérer la série comme une intégrale. I. Proc. Japan Acad., **38**, 213-216 (1962). Dans cette Note, nous avons simplement dit l'intégrale $(E.R.)$ au lieu de $(E.R.\nu)$.

3) Pour le détail, voir H. Okano: Sur une généralisation de l'intégrale $(E.R.)$ et un théorème général de l'intégration par parties. Jour. Math. Soc. Japan, **14**, 430-442 (1962). Dans cette Note, nous avons donné la définition de l'intégrale $(E.R.\nu)$ au moyen de l'espace rangé. Mais, on peut voir aussitôt qu'elle est équivalente à celle qu'il suit.

L'intégrale $(E.R.)$ et la généralisation de cette sorte ont été premièrement définies par Prof. K. Kunugi dans les Notes: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956); Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math. (Mon. Ser. Res. Inst. App. El., Hokkaido Univ., **7**), 1-30 (1959).

Soit ν une mesure finie ou σ-finie, jouissant des conditions suivantes:

1*) Tout ensemble mesurable pour la mesure lebesguienne est mesurable pour ν.

2*) $\mathrm{Mes}(A)$[4] $=0$ si et seulement si $\nu(A)=0$.

Désignons par $K_1(\nu)$ la famille de toutes les fonctions $f(x)$ telles qu'il existe une suite d'ensembles mesurables $\{A_n\}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(P_1) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, et $\nu([a, b]-A_n) \to 0$.

(P_2) Il existe un nombre $k>1$ tel que $k\nu([a, b]-A_{n+1}) \geq \nu([a, b]-A_n)$ pour tout n.

(P_3) $f(x)$ est sommable sur chaque A_n.

(P_4) Il existe une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_n\}$ jouissant des conditions suivantes:

1) $\varepsilon_n \downarrow 0$.

2) Pour tout ensemble E tel que $E \subseteq A_n$ et $\nu(E) \leq \nu([a, b]-A_n)$, on a $\int_E |f(x)|\, dx \leq \varepsilon_n$.

Alors, nous pouvons démontrer que, si $f(x) \in K_1(\nu)$, deux valeurs limites

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{A_n} f(x)dx, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{A_n} f(x)dx$$

sont indépendantes de choix de $\{A_n\}$ et donc déterminées par f. Nous désignons ces valeurs limites par $\bar{I}(f, \nu)$ et $\underline{I}(f, \nu)$ respectivement. Si $\bar{I}(f, \nu)=\underline{I}(f, \nu)$, nous écrivons

$$\bar{I}(f, \nu)=\underline{I}(f, \nu)=I(f, \nu)=(E.R.\nu) \int_a^b f(x)dx.$$

Si $I(f, \nu)$ est finie, $f(x)$ sera dite intégrable $(E.R.\nu)$ sur $[a, b]$. Nous pouvons démontrer le

Théorème B. 1) *Pour toute fonction non-négative, l'intégrale* $(E.R.\nu)$ *est équivalente à celle de Lebesgue: Si* $f(x) \geq 0$, *on a*

$$(E.R.\nu) \int_a^b f(x)dx=(L) \int_a^b f(x)dx.$$

2) *L'intégrale* $(E.R.\nu)$ *est linéaire.*

2. *Moyennes* $(\bar{\mathrm{N}}, p_n)$ *dues à Hardy.*[5]

Soit $p_0, p_1, p_2, \cdots$ une suite de nombres positifs tels que $P_n=\sum_{i=0}^{n} p_i \to \infty$ quand $n\to\infty$. Étant donnée une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, nous disons avec Hardy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(\bar{\mathrm{N}}, p_n)$$

si l'on a

4) Mes (A) désigne la mesure lebesguienne d'ensemble A.

5) Voir G. H. Hardy: Divergent Series. Oxford (1949).

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n} p_i s_i \to s,$$

où $s_i=a_0+a_1+\cdots+a_i$.

La méthode $(\bar{\mathrm{N}}, 1)$ est égale à la méthode (C, 1) de Cesàro. Un autre cas intéressant est la moyenne logarithmique, définie par $p_n=(n+1)^{-1}$, dont

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{s_i}{i+1}\sim\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{i=0}^{n}\frac{s_i}{i+1}.$$

Pour la méthode $(\bar{\mathrm{N}}, p_n)$, les théorèmes suivants sont bien connus.

Théorème C. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s(\bar{\mathrm{N}}, p_n)$, *alors* $s_n-s=o(P_n/p_n)$.

Théorème D. *Si l'on a ou*

1) $$q_{n+1}/q_n \le p_{n+1}/p_n$$

ou

2) $$p_{n+1}/p_n \le q_{n+1}/q_n, \quad P_n/p_n \le HQ_n/q_n \quad (H \text{ une constante}),$$

alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s(\bar{\mathrm{N}}, p_n)$ *entraîne* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s(\bar{\mathrm{N}}, q_n)$.

3. *Cas de la moyenne* (C, 1).

Si l'on définit une mesure ν_1 par

$$\nu_1(A)=\int_A g_1(x)dx,$$

où

$$g_1(x)=\frac{d}{dx}\exp\left(-\frac{i+1}{x-i}\right) \quad (i\le x<i+1,\ i=0, 1, 2, \cdots),$$

alors on a le

Théorème 1. *Soit* $\{a_n\}$ *une suite telle que* $a_n=o(1)$. *Alors, pour que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *soit sommable* (C, 1), *il faut et il suffit que la fonction* $f_a(x)$ *soit intégrable* $(E.R.\nu_1)$ *sur* $[0, \infty)$. *Et, dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathrm{C}, 1)=(E.R.\nu_1)\int_0^{\infty} f_a(x)dx.$$

Démonstration. Posons

$$A_n=\bigcup_{i=0}^{n-1}\left[i+\frac{i+2}{n+2},\ i+1\right), \qquad n=1, 2, 3, \cdots,$$

et démontrons que la suite $\{A_n\}$ jouit des conditions $(\mathrm{P}_1)-(\mathrm{P}_4)$.

Premièrement, on voit

$$A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots,$$

$$\nu_1([0, \infty)-A_n)=\left(n+\frac{e}{e-1}\right)e^{-(n+2)};$$

donc, $\{A_n\}$ jouit des conditions (P_1), (P_2).

Ensuite, puisque $f_a(x)$ est bornée dans A_n et $\mathrm{Mes}(A_n)<\infty$, elle est sommable sur A_n.

D'ailleur, pour démontrer (P_4), posons

$$\eta_n = \frac{1}{n} \max_{0 \leq i \leq n-1} (i+2) \, | a_i |,$$

$$\varepsilon_n = \sup_{i \geq n} \eta_i.$$

Alors, d'après la hypothèse $a_n = o(1)$, on a $\eta_n \to 0$ et donc $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Or, supposons que E soit sous-ensemble de A_n tel que $\nu_1(E) \leq \nu_1([0, \infty) - A_n)$, et posons

$$E_i = E \cap \left[i + \frac{i+2}{n+2}, \, i+1 \right).$$

Puisque $g_1(x)$ est monotone croissante dans l'intervalle $[i, i+1)$, on a

$$g_1(x) \geq g_1\left(i + \frac{i+2}{n+2} \right) = \frac{(n+2)^2}{i+2} e^{-(n+2)}$$

pour tout $x \in E_i$;
donc,

$$\mathrm{Mes}\,(E_i) \leq \frac{i+2}{(n+2)^2} e^{n+2} \nu_1(E_i).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_E | f_a(x) | \, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} | a_i | \, \mathrm{Mes}\,(E_i) \\ &\leq \frac{1}{n+2} \eta_n e^{n+2} \sum_{i=0}^{n-1} \nu_1(E_i) \\ &\leq \frac{1}{n+2} \eta_n e^{n+2} \nu_1([0, \infty) - A_n) \\ &\leq \varepsilon_n . \end{aligned}$$

Par conséquent, $\{A_n\}$ satisfait à (P_4).

Enfin, on a

$$\int_{A_n} f_a(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n+2} a_i = \frac{1}{n+2} \sum_{i=0}^{n-1} s_i;$$

d'où, $(E.R.\nu_1) \int_0^\infty f_a(x) dx = s$ si et seulement si $\sum_{n=0}^\infty a_n = s$ (C, 1), c.q.f.d.

Maintenant, pour se débarrasser de la condition $a_n = o(1)$, considérons la fonction $\bar{f}_a(x)$, $0 \leq x < \infty$, associée à la suite a: $a_0, a_1, a_2, \cdots$, définie par

$$\bar{f}_a(x) = \frac{a_i}{i+1} \left(\frac{i(i+1)}{2} \leq x < \frac{(i+1)(i+2)}{2}, \; i = 0, 1, 2, \cdots \right).$$

Alors, on a le

Théorème 2. *Pour que* $\sum_{n=0}^\infty a_n = s$ (C, 1), *il faut et il suffit qu'on ait* $s_n = o(n)$ *et* $(E.R.\nu_1) \int_0^\infty \bar{f}_a(x) dx = s$.

Démonstration. Si de la série $\sum_{n=0}^\infty a_n$, on en déduit une seconde

$$\sum_{n=0}^\infty b_n = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \cdots,$$

on a, pour $\dfrac{m(m+1)}{2} \leq n < \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} s_i(b)=\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{i=0}^{m-2}\frac{2i+3}{2}s_i+\frac{2k-m}{2}s_{m-1}+\frac{k(k+1)}{2(m+1)}a_m\right\},$$

où $k=n-\dfrac{m(m+1)}{2}+1,\ s_i=\sum_{j=0}^{i}a_j,\ s_i(b)=\sum_{j=0}^{i}b_j.$

D'une part, si $s_m=o(m)$ et donc $a_m=o(m)$, on a

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{2k-1}{2}s_{m-1}+\frac{k(k+1)}{2(m+1)}a_m\right\}=o(1).$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{2i+3}{2}s_i\sim\frac{2}{m^2-4}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{2i+3}{2}s_i,$$

et, d'après le Théorème D, les méthodes $(\bar{\mathrm{N}}, 1)$ et $\left(\bar{\mathrm{N}}, \dfrac{2n+3}{2}\right)$ sont équivalentes.

Ainsi, si $s_n=o(n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n=s$ (C, 1) entraîne $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$ (C, 1).

Inversement, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=s$, on a $s_n=o(n)$ en vertu du Théorème C, et donc $\sum_{n=0}^{\infty} b_n=s$ (C, 1).

Enfin, puisque $s_n=o(n)$ implique $b_n=o(1)$, on a, du Théorème 1,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(\mathrm{C}, 1)&=(E.R.\nu_1)\int_0^{\infty} f_b(x)dx\\ &=(E.R.\nu_1)\int_0^{\infty}\bar{f}_a(x)dx,\end{aligned}\qquad \text{c.q.f.d.}$$

4. *Cas de la moyenne logarithmique.*

Si l'on définit une mesure ν_2 par

$$\nu_2(A)=\int_A g_2(x)dx,$$

où

$$g_2(x)=\frac{d}{dx}\exp\left(-\exp\frac{\log(i+3)}{x-i}\right)\ \left(i\leq x<i+1,\ i=0, 1, 2, \cdots\right),$$

alors, on a le

Théorème 3. *Soit $\{a_n\}$ une suite telle que $a_n=o(\log n)$. Alors, pour que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soit sommable $(\bar{\mathrm{N}}, (n+1)^{-1})$, il faut et il suffit que la fonction $f_a(x)$ soit intégrable $(E.R.\nu_2)$ sur $[0, \infty)$. Et, dans ce cas, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{\mathrm{N}}, (n+1)^{-1})=(E.R.\nu_2)\int_0^{\infty} f_a(x)dx.$$

Démonstration. Si l'on pose

$$A_n=\bigcup_{i=0}^{n}\left[i+\frac{\log(i+3)}{\log(n+4)},\ i+1\right),$$

alors, en vertu de la condition $a_n=o(\log n)$, de la même manière que le Théorème 1, on peut démontrer que la suite $\{A_n\}$ satisfait aux conditions $(\mathrm{P}_1)-(\mathrm{P}_4)$.

D'ailleurs, on a

$$\int_{A_n} f_a(x)dx = \frac{1}{\log(n+4)} \sum_{i=0}^{n} (\log(n+4) - \log(i+3))a_i$$
$$\sim \frac{1}{\log(n+4) - \log 3} \sum_{i=0}^{n} (\log(i+4) - \log(i+3))s_i.$$

De plus, d'après le Théorème D, la méthode $(\bar{\mathrm{N}}, \log(n+4) - \log(n+3))$ est équivalente à la méthode $(\bar{\mathrm{N}}, (n+1)^{-1})$.

Ainsi, on a $(\mathrm{E.\,R.}\ \nu_2)\int_0^\infty f_a(x)dx = s$ si et seulement si $\sum_{n=0}^\infty a_n = s(\bar{\mathrm{N}}, (n+1)^{-1})$, c.q.f.d.