23. Sur les Propriétés Asymptotiques des Valeurs Propres pour les Opérateurs Elliptiques

Par Sigeru MIZOHATA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Feb. 12, 1965)

1. *Introduction.*

Considérons le problème aux limites de la forme:

$$\begin{cases} A(x, D)u(x)=f(x)\ , \\ B_j(x, D)u(x)=0\ , \quad j=1, 2, \cdots, b(=m/2), \end{cases}$$

où $f(x)\in L^2(\Omega)$, Ω étant un ouvert borné dans R^n dont la frontière est une hypersurface S assez régulière, et $A(x, D)$ étant un opérateur elliptique d'ordre m. Dans cette Note, les coefficients sont supposés aussi assez réguliers. Supposons que le système $\{B_j\}$ est normal et recouvre A (voir, [7], [1]). Supposons maintenant que A soit inversible dans $L^2(\Omega)$. Plus précisément, soit $\mathcal{D}(A)$ le domaine de définition

$$\mathcal{D}(A)=\{u\in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega);\ B_j(x, D)u(x)=0,\ x\in S, \quad j=1, 2, \cdots, b\}$$

alors, notre hypothèse dit que A est une application biunivoque de $\mathcal{D}(A)$ sur $L^2(\Omega)$. Désignons par $G=A^{-1}$ l'opérateur de Green. G est un opérateur complètement continu dans $L^2(\Omega)$. Nous allons considérer le cas où A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique e^{tA}. On peut supposer, sans diminuer la généralité, à savoir en considérant $A-tI(t>0)$ au lieu de A lui-même, que

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leq \frac{C}{|\lambda|+1}, \quad \text{pour } \lambda\in C^1-\textstyle\sum, \tag{1.1}$$

où $\sum$ est le secteur défini sous la forme: $|\arg\lambda-\pi|\leq\varphi_0(<\pi/2)$.

$$e^{tA}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda, \quad t>0, \tag{1.2}$$

où Γ est un chemin qu'on peut prendre le contour de $\sum$.

$$G=-\int_0^\infty e^{tA}dt. \tag{1.3}$$

Remarquons qu'en posant

$$(I-\lambda G)^{-1}=I+\lambda\Gamma_G(\lambda), \tag{1.4}$$

on a

$$(I-\lambda A)^{-1}=-\Gamma_G(\lambda). \tag{1.5}$$

Notre principal résultat est le théorème 2. Comme on verra, le travail d'Arima ([2]) est un pilier de cette Note. Comme la démonstration des théorème énoncés ci-dessous est délicate, nous nous limitons à donner des esquisses des démonstrations. Un article ultérieur donnera la démonstration détaillée. Je tiens à exprimer des remerciements à mon collègue N. Shimakura, qui a bien voulu discuter avec moi. Plusieurs points ont été éclaircis par sa collaboration.

2. On va montrer le

Théorème 1. L'espace des fonctions propres généralisées est complet dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$,

$$G_\varepsilon = -\int_\varepsilon^\infty e^{tA} dt. \tag{2.1}$$

On démontre que, soient $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots}$ les valeurs propres de $G(=$celles de $A)$, alors, G a comme valeurs propres précisément $\{\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}\}_{j=1,2,3,\dots}$. De plus, l'espace des fonctions principales correspondant à la valeur propre λ_j de G et celui de G_ε correspondant à la valeur propre $\lambda_j e^{-\varepsilon\lambda_j}$ coincident. En effet, on a

$$\Gamma_{G_\varepsilon}(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}} \Gamma_G(\lambda) d\lambda,$$

qui est valable pour μ au voisinage de l'origine et aussi pour Re $\mu \geq 0$. Or, ce second membre s'écrit encore

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}} \Gamma_G(\lambda) d\lambda + \sum_i \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_i}\left[\frac{1}{\mu - \lambda e^{-\varepsilon\lambda}} \Gamma_G(\lambda)\right],$$

où les résidus sont à prendre pour les λ_j compris dans Γ et Γ'. Alors le premier terme est holomorphe dans un plus grand voisinage de l'origine.

On montre que G_ε a le noyau continu $G_\varepsilon(x, y)$. Il y a plus, $G_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ a aussi cette propriété.

Supposons maintenant que le théorème ne soit pas vrai. Alors il existe une fonction non nulle $f(x) \in L^2(\Omega)$, qui soit orthogonale à toutes les fonctions principales de G (=celles de G_ε). Considérons donc

$$F(\lambda) = (f(x), \Gamma_{G_\varepsilon}(\lambda) g(x)), \text{ où } g(x) \in L^2(\Omega); \ (I - \lambda G_\varepsilon)^{-1} = I + \lambda \Gamma_{G_\varepsilon}(\lambda).$$

$F(\lambda)$ est holomorphe et bornée dans le complémentaire de $\sum$, et dans $\sum$, on peut appliquer le principe de Phragmén-lindelöf à la fonction $F(\lambda)$. D'où, $F(\lambda)$ est une constante. D'autre part, si $\lambda \to +\infty$, $F(\lambda) \to 0$, Donc, $F(\lambda) \equiv 0$. En posant $\lambda = 0$, on a

$$(f(x), G_\varepsilon g(x)) = 0.$$

Comme ε est arbitraire, en tendant ε vers 0, on a

$$(f(x), Gg(x)) = 0.$$

Comme l'image $Gg(x)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, lorsque $g(x)$ parcourt $L^2(\Omega)$, on a $f(x) = 0$ contrairement à l'hypothèse. c.q.f.d.

Remarque. Le théorème 1 a été démontré par Agmon dans une condition plus restrictive ([1]).

3. Formule asymptotique. Nous nous rappelons la formule de trace due à Poincaré ([6]),

$$(3.1)\qquad -\frac{\mathscr{D}_k'(\lambda; G)}{\mathscr{D}_k(\lambda; G)} = \text{trace}\,(\Gamma_G(\lambda) - G - \lambda G^2 - \cdots \lambda^{k-2}G^{k-1})$$

où on a supposé que, à partir de k, les noyaux itérés G^n ont des noyaux continus. Or, le second membre s'écrit

$$-\text{trace}\left(\int_0^\infty e^{tA}\left(e^{-\lambda t} - \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-\lambda t)^j}{j!}\right)dt\right).$$

Considérons le premier membre. Utilisons un résultat d'Arima dans ([2]) que voici:

Pour $0<t\leq T$, si l'on écrit

$$e^{tA} = G(t, x, y) = G_0(t, x-y; y) + G_1(t, x, y) + G_c(t, x, y),$$

(G_0+G_1) étant le noyau fondamental (construit par Eidelman) correspondant au problème de Cauchy, et G_c étant le noyau de compensateur, on a

$$(3.2)\qquad |G_c(t, x, y)| \leq \text{const.}\, t^{-n/m}\exp\left(-c\left|\frac{x-y}{t^\alpha}\right|^q - c\left(\frac{l_y}{t^\alpha}\right)^q\right),\quad c>0\,,$$

où $\qquad l_y = \text{dis}\,(y, S),\quad \alpha = 1/m,\quad q = m/(m-1).$

Comme une conséquence, on a

$$(3.3)\qquad |G(t, x, y)| \leq \text{const.}\, t^{-n/m}.$$

La considération des puissances fractionnaires G^s, $s>0$, montre que

(3.4) $\qquad G^s$ a le noyau continu pour $s>n/m$.

$$(3.5)\qquad \sum_j \frac{1}{|\lambda_j|^\alpha} < +\infty,\quad \text{si } \alpha < n/m.$$

Prenons donc dans (3.1),

$$(3.6)\qquad k = [n/m]+1.$$

En utilisant G_c, on montre que

$$(3.7)\qquad \mathscr{D}_k(\lambda; G) = \prod_j\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \times \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{k-1}\right\}.$$

En combinant (3.1) et (3.7), on a

$$(3.8)\qquad \sum_j\left\{\frac{1}{\lambda-\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j} + \cdots + \frac{\lambda^{k-2}}{\lambda_j^{k-1}}\right\} = \text{trace}\left(\int_0^\infty e^{tA}\varphi(t; \lambda)dt\right),$$

où $\qquad \varphi(t; \lambda) = e^{-\lambda t} - \sum_{j=0}^{k-2}\frac{(-\lambda t)^j}{j!}.$

La différentiation $(k-1)$-fois par rapport à λ donne

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_j\frac{1}{(\lambda-\lambda_j)^k} = \text{trace}\left(\int_0^1(-1)^{k-1}t^{k-1}e^{-\lambda t}e^{tA}dt\right) + O(e^{-c'\lambda}),$$

Désignons la partie principale de $A(x, D)$ par $A_0(x, D)$. Supposons que A_0 est réel. Posons

$$a(x, \xi)=(-1)^{b+1}A_0(x, \xi).$$

$a(x, \xi)$ est alors défini-positif: $a(x, \xi)>0$, pour $\xi\neq 0$. Définissons

$$w_a(x)=\int_{a(x,\xi)<1} d\xi, \qquad w(\Omega)=\int_\Omega w_a(x)dx. \tag{3.9}$$

Remarquons alors

$$\int_\Omega G_0(t, O; x)dx=(2\pi)^{-n}\Gamma\Big(\frac{n}{m}+1\Big)w(\Omega)t^{-n/m},$$

$$\int_\Omega |G_1(t, x, x)+G_c(t, x,x)|\, dx\leq \text{const. } t^{-(n-1)/m}.$$

D'où, pour $\lambda\to+\infty$, le second membre (trace) devient

$$(2\pi)^{-n}\Gamma\Big(\frac{n}{m}+1\Big)\Gamma\Big(k-\frac{n}{m}\Big)w(\Omega)\lambda^{\frac{n}{m}-k}+O(\lambda^{\frac{n}{m}-k-\alpha}).$$

Maintenant on impose aux λ_j la condition suivante:

(C) Les λ_j ont comme une seule direction asymptotique l'axe réel négatif.

En d'autres termes, quel que soit $\varepsilon>0$, on a

$$|Im\lambda_j|\leq\varepsilon\,|\operatorname{Re}\lambda_j|, \quad \text{pour } j>N(\varepsilon).$$

Dans cette condition, posons $-\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$; on a finalement

$$\sum_j \frac{1}{(\lambda+\alpha_j)^k}\sim(2\pi)^{-n}\{(k-1)!\}^{-1} \times\Gamma\Big(\frac{n}{m}+1\Big)\Gamma\Big(k-\frac{n}{m}\Big)w(\Omega)\lambda^{\frac{n}{m}-k}. \tag{3.10}$$

Appliquons le théorème taubérien dû à Hardy-Littlewood ([4]):

$$\int_0^{+\infty}\frac{dM(t)}{(t+\lambda)^\rho}\sim\frac{A}{\lambda^\sigma}, \quad \lambda\to+\infty, \text{ entraîne que}$$

$$M(t)\sim A\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho-\sigma+1)}t^{\rho-\sigma}, \quad \text{pour } t\to+\infty,$$

où $0<\sigma<\rho$, et $M(t)$ étant une fonction positive non-décroissante. D'où,

$$N(t)=\sum_{\alpha_j<t}1\sim(2\pi)^{-n}w(\Omega)t^{n/m}, \quad \text{pour } t\to+\infty.$$

Résumons le résultat, qui a été montré par Carleman ([3]) et Gårding ([5]) et par plusieurs auteurs dans des cas particuliers:

Théorème 2. Dans la condition (C) ci-dessus, on a

$$N(t)=\sum_{\operatorname{Re}\lambda_j>-t}1\sim(2\pi)^{-n}w(\Omega)t^{n/m}, \quad \text{pour } t\to+\infty,$$

$$\lambda_j\sim-(2\pi)^m w(\Omega)^{-m/n}j^{m/n}, \qquad \text{pour } j\to\infty.$$

Références

[1] S. Agmon: On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., **15**, 119-147 (1962).

[2] R. Arima: On boundary value problem for parabolic equations. Proc. Japan Acad., **40**, 460-464 (1964).
[3] T. Carleman: Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. Ber. Math. Phys. Klasse der Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, **88**, 119-132 (1936).
[4] G.H. Hardy and J.E. Littwood: Notes of the theory of series (XI). Proc. London Math., Soc., **30**, 23-37 (1930).
[5] L. Gårding: On the asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators. Math. Scand., **1**, 232-255 (1953).
[6] H. Poincaré: Remarques diverses sur l'équation de Fredholm. Acta, Math., **33**, 57-86 (1910).
[7] M. Schechter: General boundary value problems for elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., **12**, 457-482 (1959).