171. *Sur determinant de Jacobi et relation fonctionnelle*

Par Tokui SATŌ
Départment de Mathématiques, Université de Kōbe

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

1. Introduction. Depuis C. G. Jacobi, il est bien connu qu'il y a une relation locale parmi les fonctions $f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)$, si le déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}$ s'annule dans un domaine D. Cependant dans leur célèbre mémoire[1] K. Knopp et R. Schmidt ont démontré l'existence d'une relation globale dans D tout d'un trait dépassant les bornes du problème local, et dès lors plusieurs mathématiciens ont poursuivi le même sujet. Leurs résultats sont très intéressants, mais il me semble qu'ils sont trop élants, je voudrais rechercher l'existence de relations globales par la méthode de continuation de relations locales.

2. Soit $f(x_1, \cdots, x_m)$ une fonction définie dans un domaine D. Lorsque $f(x_1, \cdots, x_m)$ est différentiable au sens de Stolz en un point $(x_1, \cdots, x_m)$, nous dirons simplement que $f(x_1, \cdots, x_m)$ est différentiable au point $(x_1, \cdots, x_m)$. Lorsque $f(x_1, \cdots, x_m)$ est différentiable à chaque point de D, nous appellerons $f(x_1, \cdots, x_m)$ fonction différentiable dans D, et défignerons ce fait par $f(x_1, \cdots, x_m) \in C^d[D]$. Nous rappelons le théorème suivant, car il est très important quoiqu'il soit bien connu. Nous l'expliquons sous une forme convenable pour mettre en évidence que dans ce théorème il ne s'agit que de l'existence locale de relation fonctionelle.

Théorème 1. *Soit*

$$f_j(x_1, \cdots, x_m) \qquad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

un système de fonctions différentiables dans un voisinage du point $(a_1, \cdots, a_m)$ *et* r *le rang de la matrice fonctionnelle*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}, \cdots\cdots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \tag{2}$$

du système (1).

1) K. Knopp und R. Schmidt: Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. Math. Zeitscher., **25**, 373-381 (1926).

Posons

$$(3)\qquad b_j=f_j(a_1,\cdots,a_m)\qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

Si l'on a

$$(4)\qquad \frac{\partial(f_1,\cdots,f_r)}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}\neq 0\qquad (r<m,\ r<n)$$

dans un voisinage du point $(a_1,\cdots,a_m)$, *il existe un système de fonctions*

$$(5)\qquad F_k(y_1,\cdots,y_r)\qquad (k=r+1,\cdots,n)$$

différentiables dans un voisinage du point $(b_1,\cdots,b_r)$ *tel qu'on ait*

$$(6)\qquad f_k(x_1,\cdots,x_m)=F_k(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_r(x_1,\cdots,x_m))\qquad (k=r+1,\cdots,m)$$

dans un voisinage du point $(a_1,\cdots,a_m)$.

Théorème 2. *Soit* (1) *un système de fonctions différentiables dans un voisinage du point* $(a_1,\cdots,a_m)$; *et supposons que l'on a* (4) *dans un voisinage du point* $(a_1,\cdots,a_m)$. *Alors on a au plus un système de fonctions* (5) *différentiables dans un voisinage du point* $(b_1,\cdots,b_r)$ *qui satisfait aux égalités* (6) *dans un voisinage du point* $(a_1,\cdots,a_m)$, *où* b_j $(j=1,2,\cdots,n)$ *sont les mêmes que* (3).

Preuve. Soient $F_k(y_1,\cdots,y_r)$, $G_k(y_1,\cdots,y_r)$ $(k=r+1,\cdots,n)$ deux systèmes satisfaisant à l'hypothèse. Alors on a (6) et

$$(7)\qquad f_k(x_1,\cdots,x_m)=G_k(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_r(x_1,\cdots,x_m))\qquad (k=r+1,\cdots,n)$$

dans un voisinage $U(a_1,\cdots,a_m)$. On obtient donc dans $U(a_1,\cdots,a_m)$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial F_k}{\partial y_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\frac{\partial G_k}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial G_k}{\partial y_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,r,\ k=r+1,\cdots,n).$$

En vertu de (4), on obtient

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial y_i}(F_k-G_k)=0\qquad (i=1,2,\cdots,r).$$

Il en résulte que la fonction $F_k(y_1,\cdots,y_r)-G_k(y_1,\cdots,y_r)$ doit satisfaire aux équations aux dérivées partielles (8).

$$F_k(y_1,\cdots,y_r)-G_k(y_1,\cdots,y_r)=C_k\qquad (k=r+1,\cdots,n)$$

sont les solutions générales des équations (8), où C_k $(k=r+1,\cdots,n)$ sont constants. En vertu de (6) et (7), on obtient $C_k=0$ $(k=r+1,\cdots,n)$.

3. Dans ce numéro nous cherchons une relation globale dans D pour le système de fonctions (1).

Soit $\varDelta$ un domaine contenant l'image de l'application

$$y_j=f_j(x_1,\cdots,x_m)\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

de D.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définies dans Δ, laquelle nous préciserons plus loin.

Soit $(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ un point dans D et $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ une fonction définie dans D.

Lorsque l'on peut prendre un voisinage $U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ et une fonction $F(y_1, \cdots, y_n) \in \mathcal{F}$ de manière que

$$(9) \qquad \varphi(x_1, \cdots, x_m) = F(f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))$$

dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$, on appelle $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ fonction dépendante du système (1) au point $(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ par rapport à $\mathcal{F}$, "indépendant" est la négation de "dependant".

Lorsqu'en touts les points de D, $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ est dépendante (indépendante) du système (1), $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ s'appelle fonction dépendante (indépendante) du système (1) dans D par rapport à $\mathcal{F}$.

Lorsque chaque fonction du système de fonctions

$$(10) \qquad f_k(x_1, \cdots, x_m) \qquad (k=1, 2, \cdots, n+1)$$

est indépendante du système d'autres fonctions dans D par rapport à $\mathcal{F}$, on appelle (10) système mutuellement indépendant par rapport à $\mathcal{F}$.

Considérons un système de fonctions

$$(11) \qquad f_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i=1, 2, \cdots, m)\,.$$

Dans toute la suite, on suppose toujours que $f_i(x_1, \cdots, x_m) \in C^d[D]$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ *et que* $\mathcal{F}$ *est* $C^d[\Delta]$.

Théorème 3. *Pour que le système* (11) *soit mutuellement indépendant par rapport à* $\mathcal{F}$, *il faut et il suffit que, quelque soit* $(x_1^0, \cdots, x_m^0) \in D$, *il existe un voisinage* $U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ *et une fonction* $F(y_1, \cdots, y_m) \in \mathcal{F}$ *tels que dans* $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ *on ait identiquement*

$$(12) \qquad F(f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)) = 0$$

et que toutes les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial y_i} F(y_1, \cdots, y_m)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ *ne s'annulent dans l'image de l'application*

$$(13) \qquad y_i = f_i(x_1, \cdots, x_m) \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

de $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Il suffit de montrer le suivant:

Sous les hypothèses du théorème, la condition nécessaire et suffisante pour que $f_1(x_1, \cdots, x_m)$ soit dépendante du système de $f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)$ dans D, est que l'égalité (12) subsiste identiquement dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ et que l'on a

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial y_1} F(y_1, \cdots, y_m) \neq 0$$

dans l'image de l'application (13) de $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$. Soit $f_1(x_1, \cdots, x_m)$ dépendante du système de $f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)$ dans D. Par définition, pour $(x_1^0, \cdots, x_m^0) \in D$ on peut prendre un

voisinage $U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ et une fonction $g(y_2, \cdots, y_m) \in \mathcal{F}$ tels que
$$f_1(x_1, \cdots, x_m)=g(f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))$$
dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$.

Posons
$$F(y_1, y_2, \cdots, y_m)=y_1-g(y_2, \cdots, y_m) .$$
Alors on a (12) dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$, $F(y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathcal{F}$ et (14). Ce qui montre la nécessité des conditions dans le théorème.

Ensuite montrons qu'elle est suffisante. Posons
$$y_i^0=f_i(x_1^0, \cdots, x_m^0) \qquad (i=1, 2, \cdots, m) ,$$
et supposons que le système (11) satisfait à (12) dans $U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$.

Considérons l'équation
$$F(y_1, y_2, \cdots, y_m)=0$$
dans un voisinage $U(y_1^0, \cdots, y_m^0)$. Puisque l'on a $\dfrac{\partial F}{\partial y_1} \neq 0$, il existe dans $U(y_1^0, \cdots, y_m^0)$ une seule solution
$$y_1=g(y_2, \cdots, y_m)$$
différentiable et satisfaisant à
$$y_1^0=g(y_2^0, \cdots, y_m^0) .$$

Posons
$$g(x_1, \cdots, x_m)=g(f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)) .$$
On a alors identiquement
$$F(g(x_1, \cdots, x_m), f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))=0$$
dans un voisinage $U_1(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ suffisamment petit. L'équation
$$F(y_1, f_2(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))=0$$
admet une unique solution $y_1=h(x_1, \cdots, x_m)$ différentiable dans un voisinage $U_2(x_1, \cdots, x_m)$ et satisfaisant à
$$y_1^0=h(x_1^0, \cdots, x_m^0) .$$
D'après l'hypothèse on a (12) dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$. On a donc
$$f_1(x_1, \cdots, x_m)=g(x_1, \cdots, x_m)=h(x_1, \cdots, x_m)$$
dans un voisinage $U_0(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ contenu dans $U_1(x_1^0, \cdots, x_m^0) \cap U_2(x_1^0, \cdots, x_m^0)$. Par suite $f_1(x_1, \cdots, x_m)$ est dépendante de $f_2(x_1, \cdots, x_m)$, $\cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m)$ par rapport à $\mathcal{F}$ au point $(x_1^0, \cdots, x_m^0)$.

Théorème 4. *Pour que le système* (11) *soit mutuellement indépendant dans D, il faut et il suffit que l'on ait*
$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)} \neq 0 \tag{15}$$
dans D.

Preuve. Supposons que l'on a l'égalité (12) dans $D \cap U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ pour un voisinage $U(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ et une fonction $F(y_1, \cdots, y_m) \in \mathcal{F}$. D'après le théorème de différentiabilité de fonction composée, en dérivant (12) par rapport à $x_i (i=1, 2, \cdots, m)$, on a
$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, m) .$$

Par suite, pour que toutes $\dfrac{\partial}{\partial y_i}F(y_1,\cdots,y_m)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ soient nulles, il faut et il suffit que l'on ait (15). D'après le théorème 3, la condition cherchée est (15).

Théorème 5. *Soit* $m-s$ $(1\leqq s<m)$ *le rang du déterminant fonctionnel du système* (11); *et supposons que* $\dfrac{\partial(f_{s+1},\cdots,f_m)}{\partial(x_{s+1},\cdots,x_m)}\neq 0$ *dans* D.

Il existe un unique système de fonctions $F_1(y_{s+1},\cdots,y_m),\cdots,F_s(y_{s+1},\cdots,y_m)\in\mathfrak{F}$ *tel que*

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\cdots,x_m)&=F_1(f_{s+1}(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m))\ ,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_s(x_1,\cdots,x_m)&=F_s(f_{s+1}(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m)) \end{aligned}$$

dans D.

Preuve. Il suffirait de prouver ce théorème dans le cas où $s=1$.

Soit $(x_1,\cdots,x_m)$ un point de D. D'après les théorèmes 1 et 2, il existe un voisinage $U(x_1,\cdots,x_m)$ et une seule fonction $F(y_2,\cdots,y_m)\in\mathfrak{F}$ telle que

(16) $$f_1(x_1,\cdots,x_m)=F(f_2(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m))$$

dans $D\cap U(x_1,\cdots,x_m)$.

Cela posé, prenons deux points dans D, et une courbe γ joignant ces points et contenue dans D. On peut prendre un système de voisinages $U_1(x_1^1,\cdots,x_m^1)$, $U_2(x_1^2,\cdots,x_m^2),\cdots,U_n(x_1^n,\cdots,x_m^n)$ tel que

$$\gamma\subseteqq U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_n\ .$$

Soit

$$U_1(x_1^1,\cdots,x_m^1)\cap U_2(x_1^2,\cdots,x_m^2)\neq\varnothing\ .$$

Par hypothèse, on peut trouver $F_1(y_2,\cdots,y_m)$, $F_2(y_2,\cdots,y_m)\in\mathfrak{F}$, pour lesquelles on a

$$\begin{aligned} f_1(x_1,\cdots,x_m)&=F_1(f_2(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m))\ ,\\ f_1(x_1,\cdots,x_m)&=F_2(f_2(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m)) \end{aligned}$$

dans $D\cap U_1\cap U_2$. D'après le théorème 2, on obtient

$$F_1(y_2,\cdots,y_m)=F_2(y_2,\cdots,y_m)\ .$$

On a donc (16) dans D.

Théorème 6. *Supposons que le déterminant fonctionnel du système* (11) *soit identiquement nul dans* D *et que deux de ses mineures ne s'annulent pas dans* D*; soit*

(17) $$\frac{\partial(f_2,f_3,\cdots,f_m)}{\partial(x_2,x_3,\cdots,x_m)}\neq 0\ ,$$

(18) $$\frac{\partial(f_1,f_3,\cdots,f_m)}{\partial(x_1,x_3,\cdots,x_m)}\neq 0$$

dans D.

Il existe alors deux seules fonctions $F_1(y_2,y_3,\cdots,y_m)$, $F_2(y_1,y_3,\cdots,y_m)\in\mathfrak{F}$ *telles que*

(19) $f_1(x_1, \cdots, x_m) = F_1(f_2(x_1, \cdots, x_m), f_3(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))$,
(20) $f_2(x_1, \cdots, x_m) = F_2(f_1(x_1, \cdots, x_m), f_3(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_m))$
dans D *et*
(21) $$y_1 = F_1(F_2(y_1, y_3, \cdots, y_m), y_3, \cdots, y_m) ,$$
(22) $$y_2 = F_2(F_1(y_2, y_3, \cdots, y_m), y_3, \cdots, y_m) .$$

Preuve. En dérivant (19) et (20) par rapport à x_i $(i=1, 2, \cdots, m)$, on obtient dans D

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} ,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} .$$

En vertu de (17), on obtient

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 1 ,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_3} + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} = 0, \cdots, \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} = 0 .$$

Posons

$$F_2(F_1) = F_2(F_1(y_2, y_3, \cdots, y_m), y_3, \cdots, y_m) .$$

Alors on a

$$\frac{\partial F_2(F_1)}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}$$
$$\frac{\partial F_2(F_1)}{\partial y_3} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_3} + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} , \cdots,$$
$$\frac{\partial F_2(F_1)}{\partial y_m} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \frac{\partial F_2}{\partial y_m} .$$

Puisque (20) subsiste dans D, on a

$$F_2(F_1) \equiv y_2 .$$

En vertu de (19), on obtient de même

$$F_1(F_2) \equiv y_1 .$$

Par suite, on obtient (21) et (22).

Remarque. Lorsque les fonctions (11) appartiennent à $C^r[D]$ $(r=1, 2, \cdots, \infty, \omega)$, si l'on comprend $\mathscr{F} = C^r[\varDelta]$, tous les théorèmes 1–6 subsistent sans aucun changement.