193. Über die Zerlegbarkeit von nichtkommutativen Verbänden in kommutative Teilverbände

Von M. D. GERHARDTS

in Remscheid

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Dec. 13, 1965)

Einleitung. Die Theorie der nichtkommutativen Verbände wurde begründet von Pascual Jordan, der auf die Bedeutung dieser Algebren für die Untersuchung quantenphysikalischer Probleme hinwies und in zahlreichen Arbeiten grundlegende Betrachtungen über ihre Struktur anstellte. Unabhängig von Jordan und Mitarbeitern (E. Witt, W. Böge) hat auch S. Matsushita nichtkommutative verbandsähnliche Algebren untersucht.

Die Jordansche Theorie verhält sich zur Verbandstheorie wie die Gruppentheorie zur engeren Theorie der abelschen Gruppen. Wie in der Gruppentheorie das Vorhandensein kommutativer Untergruppen eine gewisse Bedeutung für die Struktur einer Gruppe hat, so ist auch in der Theorie der nichtkommutativen Verbände die Existenz kommutativer Unteralgebren für strukturelle Untersuchungen dieser Algebra von einigem Interesse. Eine sehr weitgehende Frage dieses Problemkreises ist die, unter welchen Bedingungen sich nichtkommutative Verbände (Schiefverbände) vollständig in nichttriviale kommutative Teilverbände zerlegen lassen. Nach einer früheren Mitteilung [2] ist für diese Zerlegbarkeit z.B. *hinreichend*, daß der Schiefverband distributiv ist. In Verallgemeinerung eines Satzes von G. Birkhoff haben in diesem Falle die entstehenden Verbände noch die zusätzliche Eigenschaft der Nichtexistenz gewisser fünfelementiger Teilverbände. Die Distributivität ist indes keineswegs *notwendig* für die geforderte Zerlegbarkeit, denn in jedem nichtdistributiven, aber kommutativen Verband ist diese ja trivialerweise gegeben. Eine hinreichende *und* notwendige Bedingung muß daher eine Abschwächung sowohl des Distributiv- als auch des Kommutativgesetzes sein. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Formulierung des in Rede stehenden Zerlegbarkeitskriteriums:

Für je drei Elemente a, b, c, eines Schiefverbandes gelte

$$(T_\wedge)\ (c\vee a\vee b)\wedge(b\vee a)=a\vee b \quad \textit{und}$$

$$(T_\vee)\ (a\wedge b)\vee(b\wedge a\wedge c)=b\wedge a.$$

Darüber hinaus werden durch Betrachtung geeigneter Kongruenzklassen und Ideale einige weitere Erkenntnisse über die Struktur von nichtkommutativen Verbänden gewonnen.

§1. Ω-Klassen und K-Ideale in Schiefverbänden. Def. 1.

Es sei M eine nicht leere Menge, und $\wedge$ und $\vee$ seien zwei binäre, eindeutige und vollständige Operationen in M. Die Algebra $M_{\wedge\vee}$ heißt ein Schiefverband, wenn für je drei Elemente $a, b, c \in M$ die folgenden Axiome gelten:

$(A_\wedge)$ $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ $(A_\vee)$ $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

$(B_\wedge)$ $a\wedge(b\vee a)=a$ $(B_\vee)$ $(a\wedge b)\vee a=a$

$(C_\wedge)$ $a\wedge(a\vee b)=a$ $(C_\vee)$ $(b\wedge a)\vee a=a$.

Das Axiomensystem ist dualsymmetrisch in folgendem Sinne: Es ist invariant gegenüber Umkehr der Reihenfolge der Elemente bei gleichzeitiger Permutation von $\wedge$ und $\vee$.

In Schiefverbänden $M_{\wedge\vee}$ bestehen für je zwei Elemente $a, b \in M$ die vier Gesetze:

$(G_\wedge)$ $(a\wedge b)\wedge a=a\wedge b$ $(G_\vee)$ $a\vee(b\vee a)=b\vee a$

$(I_\wedge)$ $a\wedge a=a$ $(I_\vee)$ $a\vee a=a$.

Gelten darüber hinaus für je zwei $a, b \in M$ noch die beiden Forderungen

$(K_\wedge)$ $a\wedge b=b\wedge a$ $(K_\vee)$ $a\vee b=b\vee a$,

so heißt $M_{\wedge\vee}$ ein *kommutativer* Schiefverband oder ein *Verband*.

In einem Schiefverband sind die Aussagen $a\wedge b=a$ und $a\vee b=b$ einerseits, sowie $a\wedge b=b\vee a$ und $a\vee b=b\wedge a$ andererseits äquivalent. Die durch

Def. 2. $$a\approx b \Longleftrightarrow a\wedge b=b\vee a$$

in $M_{\wedge\vee}$ definierte Relation $\approx$ ist eine Kongruenzrelation, d.h. eine mit den Operationen $\wedge$ und $\vee$ verträgliche Äquivalenzrelation. Bezeichnet man die zugehörigen Kongruenzklassen $\Omega_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ als *Ω-Klassen*, so ist jede Ω-Klasse bezüglich $\wedge$ und $\vee$ ein *Nest* im Sinne von Jordan-Witt [4], und die Faktorstrukture M/Ω mit den von $\wedge$ und $\vee$ abgeleiteten Operationen ist ein Verband, der *begleitende Verband* des Schiefverbandes $M_{\wedge\vee}$.

Def. 3. *Es sei $M_{\wedge\vee}$ ein Schiefverband. Eine nicht leere Teilmenge $I\subseteqq M$ heißt ein Ideal von $M_{\wedge\vee}$, wenn gilt*:

$$a\in I,\quad b\in M \Longrightarrow a\wedge b,\quad b\vee a\in I.$$[1]

Jedes Ideal eines Schiefverbandes ist abgeschlossen bezüglich $\wedge$ und $\vee$, ist also ein Teilschiefverband von $M_{\wedge\vee}$. Der Durchschnitt zweier Ideale ist entweder leer oder wieder ein Ideal. Ein Verband hat nur ein einziges Ideal, nämlich $M_{\wedge\vee}$ selbst.

Sind für je zwei Elemente a, b eines Ideals die Identitäten $a\wedge b=b\wedge a$ und $a\vee b=b\vee a$ erfüllt, so nennen wir I ein *kommutatives Ideal*, kurz ein *K-Ideal*. Hierfür gilt:

(1.1) *Je zwei K-Ideale eines Schiefverbandes sind entweder fremd oder identisch.*

(1.2) *In einem Schiefverband sei Ω eine Ω-Klasse und I ein*

---

1) Dies entspricht einem Ideal vom Typ (r, e) bei Matsushita.

K-Ideal. Dann existiert genau ein Element $e \in M$ mit $e \in \Omega$ und $e \in I$.

Jedes K-Ideal enthält also aus jeder Ω-Klasse ein und nur ein Element. Daraus folgt:

(1.3) *Jedes K-Ideal eines Schiefverbandes $M_{\wedge\vee}$ ist ein dem begleitenden Verband isomorpher kommutativer Teilschiefverband von $M_{\wedge\vee}$.*

§ 2. θ-Klassen in T-Schiefverbänden. Während in einem Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ immer mindestens ein Ideal existiert, braucht es in $M_{\wedge\vee}$ keine K-Ideale zu geben.[2] Die Existenz von K-Idealen ist hingegen, wie wir in § 3 zeigen werden, gesichert, wenn die folgende *Zerlegbarkeitsbedingung* erfüllt ist; in diesem Falle ist jedes Element $a \in M$ in genau einem K-Ideal enthalten:

Für je drei Elemente a, b, c eines Schiefverbandes $M_{\wedge\vee}$ gelte

$$(T_\wedge) \quad (c\vee a\vee b)\wedge(b\vee a)=a\vee b \quad \text{und}$$

$$(T_\vee) \quad (a\wedge b)\vee(b\wedge a\wedge c)=b\wedge a.$$ [3]

Schiefverbände, für die diese Bedingung erfüllt ist, sollen *T-Schiefverbände* genannt werden. Für sie gelten folgende Aussagen:

(2.1) *Sind a und b verschiedene Elemente der gleichen Ω-Klasse eines T-Schiefverbandes, so ist für jedes $c \in M$*

$$a\wedge c\neq b\wedge c \qquad c\wedge a=c\wedge b$$

$$a\vee c=b\vee c \qquad c\vee a\neq c\vee b.$$

Beweis: Aus $a\wedge c=b\wedge c$ würde mit $a\approx b$ folgen

$$a=a\wedge b=(b\wedge a)\vee(a\wedge b\wedge c)=b\vee(a\wedge c)=b\vee(b\wedge c)$$

$$=(b\wedge b)\vee(b\wedge b\wedge c)=b\wedge b=b.$$

Dual ergäbe sich $a=b$ aus $a\approx b$ und $c\vee a=c\vee b$. Wegen $(x\vee c)\wedge c=(x\vee c\vee c)\wedge(c\vee c)=c\vee c=c$ für alle $x\in M$ ist $(a\vee c)\wedge c=(b\vee c)\wedge c$, woraus mit $a\vee c\approx b\vee c$ nach obigem $a\vee c=b\vee c$ folgt. Dual ist $c\wedge a=c\wedge b$.

(2.2) *In einem T-Schiefverband sind je zwei Ω-Klassen gleichmachtig.*

Beweis: Es sei en Ω_1 und Ω_2 zwei Ω-Klassen, a sei Element von Ω_1, b Element von Ω_2 und Ω_3 sei die das Element $a\wedge b$ enthaltende Ω-Klasse. Ordnet man jedem $x\in\Omega_3$ das Element $a\vee x\in\Omega_1$ zu, so liefert diese Zuordnung eine ein-eindeutige Abbildung von Ω_3 auf eine Teilmenge von Ω_1, denn für verschiedene $x, y\in\Omega_3$ sind $a\vee x$ und $a\vee y$ nach (2.1) verschiedene Elemente von Ω_1. Umgekehrt liefert die

---

2) Z. B. enthält $\{a, b, c\}_{\wedge\vee}$ mit

$\wedge$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	b	a	c

$\vee$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	c	c

kein K-Ideal.

3) Wegen der Assoziativität beider Operationen können einige Klammern hier und in verschiedenen folgenden Gleichungen unterdrückt werden.

Zuordnung $z \in \Omega_1 \rightarrow z \wedge (a \wedge b) \in \Omega_3$ eine eineindeutige Abbildung von Ω_1 auf eine Teilmenge von Ω_3. Nach dem Bernsteinschen Äquivalenzsatz ist daher $|\Omega_1| = |\Omega_3|$. Entsprechend ist $|\Omega_2| = |\Omega_3|$, also insgesamt $|\Omega_1| = |\Omega_2|$.

(2.3) *In einem T-Schiefverband sind die Aussagen* $a \wedge b = b \wedge a$ *und* $a \vee b = b \vee a$ *äquivalent.*

Beweis: Es sei $a \wedge b = b \wedge a$. Mit $(T_\vee)$ ist $a \vee b = a \vee [b \vee (b \wedge a)] = (a \vee b) \vee (b \wedge a)$ und $b \vee a = (b \vee a) \vee (a \wedge b)$. Aus $a \wedge b = b \wedge a$ und $a \vee b \approx b \vee a$ folgt $a \vee b = b \vee a$ nach (2.1). Dual ergibt sich die Umkehrung.

Das Resultat (2.3) gibt Veranlassung, in einem Schiefverband durch

Def. 4. $$a \sim b \iff a \wedge b = b \wedge a$$

eine weitere Relation einzuführen, von der wir zeigen:

(2.4) *In einem T-Schiefverband ist die Relation* $\sim$ *eine Kongruenz-relation.*

Beweis: Mit $a \sim b$ und $b \sim c$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
a \wedge c &= (c \wedge a) \vee (a \wedge c \wedge b) && (T_\vee) \\
&= (c \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge c) && (\text{Vor.}) \\
&= (c \wedge a) \vee (b \wedge a \wedge c) && (\text{Vor.}) \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge a \wedge c) && (2.1) \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge c \wedge a) && (2.1) \\
&= (a \wedge c) \vee (c \wedge b \wedge a) && (\text{Vor.}) \\
&= (a \wedge c) \vee (c \wedge a \wedge b) && (\text{Vor.}) \\
&= c \wedge a. && (T_\vee)
\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit den Operationen folgt mit $(G_\wedge)$ und $(G_\vee)$ aus $a \wedge b \sim a$ und $a \vee b \sim b$.

Bezeichnet man in Analogie zu der entsprechenden Definition in § 1 die durch $\sim$ in $M_{\wedge\vee}$ erzeugten Kongruenzklassen $\Theta\kappa (\kappa \in K)$ als *Θ-Klassen*, so ist jede Θ-Klasse ein kommutativer Teilschiefverband von $M_{\wedge\vee}$, also ein Verband, und die Faktorstruktur M/Θ mit den von $\wedge$ und $\vee$ abgeleiteten Operationen ein Nest.

Nun erhält man:

(2.5) *In einem T-Schiefverband* $M_{\wedge\vee}$ *sei* Ω *eine* Ω*-Klasse und* Θ *eine* Θ*-Klasse. Dann existiert genau ein Element* $e \in M$ *mit* $e \in \Omega$ *und* $e \in \Theta$.

Mit $a \in \Omega$ *und* $b \in \Theta$ *ist* $\Omega \cap \Theta = \{a \vee (b \wedge a)\}$.

Beweis: Wegen

$$a \wedge [a \vee (b \wedge a)] = a = [a \vee (b \wedge a)] \vee a$$

ist $a \vee (b \wedge a) \in \Omega$; wegen

$$\begin{aligned}
b \wedge [a \vee (b \wedge a)] &= b \wedge [b \vee a \vee (b \wedge a)] \wedge [(b \wedge a) \vee a] && (T_\wedge) \\
&= b \wedge [b \vee a \vee (b \wedge a)] \wedge a && (C_\vee) \\
&= b \wedge a && (C_\wedge)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=(a\wedge b\wedge a)\vee(b\wedge a) && (C_\vee)\\
&=(a\wedge b)\vee(b\wedge a) && (G_\wedge)\\
&=[a\vee(a\wedge b\wedge a)\vee(b\wedge a)]\wedge[(b\wedge a)\vee(a\wedge b\wedge a)] && (T_\wedge)\\
&=[a\vee(b\wedge a)]\wedge[(b\wedge a)\vee(a\wedge b\wedge a)] && (C_\vee)\\
&=[a\vee(b\wedge a)]\wedge a\wedge b && (T_\vee)\\
&=[a\vee(b\wedge a)]\wedge b
\end{aligned}$$

ist $a\vee(b\wedge a)\in\Theta$. Dieses Element ist eindeutig bestimmt. Denn aus $x\approx y$ und $x\sim y$ folgt $x=x\wedge(y\vee x)=x\wedge(x\wedge y)=x\wedge y=y\wedge x=y\wedge(y\wedge x)=y\wedge(x\vee y)=y$.

§ 3. **Der Zerlegungssatz.** Wir beweisen nun die am Anfang von § 2 vorausgesagte Existenz von K-Idealen in T-Schiefverbänden:

(3.1) *In einem T-Schiefverband ist jede durch die Relation $\sim$ bestimmte Θ-Klasse ein K-Ideal.*

Beweis: Es sei Θ eine Θ-Klasse von $M_{\wedge\vee}$. Mit $a\in\Theta$ und $b\in M$ sind wegen $a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge b)\wedge a$ auch $a\wedge b$ und wegen der aus $(T_\wedge)$ folgenden Beziehung $a\wedge(b\vee a)=(b\vee a)\wedge a$ auch $b\vee a$ Elemente von Θ, d.h. Θ ist ein Ideal. Wegen der Kommutativität von Θ ist Θ ein K-Ideal.

Aus (1.1), (1.3), und (3.1) folgt:

(3.2) *Ein T-Schiefverband ist zerlegbar in disjunkte, dem begleitenden Verband isomorphe kommutative Teilschiefverbände.*

Umgekehrt ergibt sich:

(3.3) *Ist ein Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ in K-Ideale zerlegbar, so ist $M_{\wedge\vee}$ ein T-Schiefverband.*

Beweis: Für je drei $a, b, c\in M$ liegen die Elemente $(c\vee a\vee b)\wedge(b\vee a)$ und $a\vee b$ einerseits, sowie $(a\wedge b)\vee(b\wedge a\wedge c)$ und $b\wedge a$ andererseits in der gleichen Ω-Klasse von $M_{\wedge\vee}$. Weiterhin sind diese vier Elemente im gleichen K-Ideal enthalten, nämlich in demjenigen, das das Element b enthält. Aus der sich nach (1.2) ergebenden Eindeutigkeit folgt die Behauptung.

Zusammenfassend gilt der folgende

Satz. *Ein Schiefverband $M_{\wedge\vee}$ ist dann und nur dann in kommutative Ideale zerlegbar, wenn für je drei Elemente $a, b, c\in M$ die Forderungen*

$$(T_\wedge)\qquad (c\vee a\vee b)\wedge(b\vee a)=a\vee b \qquad \textit{und}$$
$$(T_\vee)\qquad (a\wedge b)\vee(b\wedge a\wedge c)=b\wedge a$$

erfüllt sind.

Referenz

[1] Birkhoff, G.: Lattice Theory. Rev. edition. New York (1961).
[2] Gerhardts, M. D.: Zur Charakterisierung distributiver Schiefverbände. Math. Ann. (Zuer'scheinen).

[3] Jordan, P.: Algebraische Betrachtungen zur Theorie des Wirkungsquantums und der Elementarlänge. Math. Sem. Hamburg, **18**, 99-119 (1952).
[4] Jordan, P., und Witt, E.: Zur Theorie der Schrägverbände. Akad. Mainz, 225-232 (1953).
[5] Jordan, P.: Die Theorie der Schrägverbände. Math. Sem. Hamburg, **21**, 127-138 (1957).
[6] Matsushita, S.: Ideals in non-commutative lattices. Proc. Japan Acad., **34**, 407-410 (1958).