108. *Sur les convergences dans l'espace rangé. I*

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., May 12, 1966)

Considérons un espace rangé[1] R satisfaisant aux axioms (A) et (B) de M. Hausdorff dont l'indicateur est ω.

§ 1. Une convergence. Définition 1. Étant donnée une suite des points $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ et un point x de R, nous disons que la suite $\{x_\alpha\}$ *converge quasi-proprement vers* x, ou que x est *une limite quasi-propre* de $\{x_\alpha\}$, et nous l'écrivons par

$$x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_\alpha\}$$

s'ils satisfont aux trois conditions suivantes:

(1°) $$x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\}.^{1)}$$

(2°) Lorsque x est séparé[1] d'un autre point y de R, il existe une suite fondamentale $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à x[2] dont, pour tout nombre ordinal $\alpha (0 \leq \alpha < \omega)$, on a

$$x_\alpha \in V_\alpha(x)$$

et telle qu'on a

$$y \notin \bigcap_\alpha V_\alpha(x).$$

(3°) Lorsqu'un point y de R est séparé du point x, pour toute suite fondamentale $\{U_\alpha(y) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à y telle qu'on a $x \notin \bigcap_\alpha U_\alpha(y)$, il existe un nombre ordinal $\alpha_0 (0 \leq \alpha_0 < \omega)$ tel que la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U_{\alpha_0}(y)$.

Alors, pour une suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de R et pour des points x, y de R, il est facile d'établir les propositions suivantes.

Proposition 1. $x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-prop}}\ x_\alpha\}^{1)}$ *entraîne* $x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_\alpha\}$.

Proposition 2. *Si l'on a* $x_\alpha \equiv x$ $(0 \leq \alpha < \omega)$, *alors nous avons*

$$x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_\alpha\}.$$

Proposition 3. *Si l'on a* $x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_\alpha\}$, *alors pour toute suite partielle*[1] $\{x_{\alpha(\beta)} \mid 0 \leq \beta < \omega\}$ *de la suite* $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$, *on a*

$$x \in \{\underset{\beta}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_{\alpha(\beta)}\}.$$

Proposition 4. *Si l'espace rangé R satisfait á l'axiom (b) de Prof. K. Kunugi,*[1] *et si l'on a, pour un nombre ordinal* $\alpha_0 (0 \leq \alpha_0 < \omega)$,

$$x \in \{\underset{\alpha}{\text{lim-}q\text{-prop}}\ x_{\alpha_0+\alpha}\}$$

1) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

2) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. II (à paraître).

alors on a

$$x \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\}.$$

Supposons maintenant que l'espace R satisfait à l'axiom de séparation (T_0) de M. Kolmogoroff, alors nous avons deux propositions suivantes:

Proposition 5. *Si l'on a*

$$x,\, y \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\}$$

alors on a $x=y$.

Proposition 6. *Si l'on a* $x \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\}$ *et si l'on* a

$$x_\alpha \neq x \text{ (pour tout } \alpha : 0 \leq \alpha < \omega)$$

alors il existe une suite $\{x_{\alpha(\beta)} \mid 0 \leq \beta < \omega\}$ *partielle de la suite* $\{x_\alpha\}$ *telle que*

$$\beta \neq \beta' \text{ entraîne } x_{\alpha(\beta)} \neq x_{\alpha(\beta')}.$$

Démonstration. S'il existe un nombre ordinal $\alpha_0 (0 \leq \alpha_0 < \omega)$ tel que pour tout nombre ordinal $\alpha (\alpha_0 \leq \alpha < \omega)$ il existe un nombre ordinal $\beta (0 \leq \beta < \alpha_0)$ tel que l'on a

$$x_\alpha = x_\beta.$$

Alors, parce que l'indicateur ω de R est un nombre ordinal limite inaccessible, il existe un nombre ordinal β_0 $(0 \leq \beta_0 < \alpha_0)$ et une suite

$$\{x_{\alpha(\gamma)} \mid 0 \leq \gamma < \omega\}$$

partielle de la suite donnée tels que

$$x_{\alpha(\gamma)} = x_{\beta_0} \text{ (pour tout } \gamma : 0 \leq \gamma < \omega).$$

Donc on a

$$x_{\beta_0} \in \{\lim_{\gamma}\text{-}q\text{-prop } x_{\alpha(\gamma)}\}.$$

Ce contredit que

$$x \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\} \text{ et } x \neq x_{\beta_0}$$ c. q. f. d.

Remarque. Pour le cas où la limite quasi-propre consiste en un seul point, nous écrivons $x = \lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha$ au lieu de $x \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\}$.

Pour une partie E quelconque d'un espace rangé R satisfaisant aux axioms (A) et (B), nous désignons comme il suit:

$$\lambda(E) = \{x \mid x \in \{\lim_{\alpha} x_\alpha\} \text{ où } \forall\alpha \ x_\alpha \in E\}$$

$$\lambda_p(E) = \{x \mid x \in \{\lim_{\alpha}\text{-prop } x_\alpha\} \text{ où } \forall\alpha \ x_\alpha \in E\}$$

$$\lambda_{qp}(E) = \{x \mid x \in \{\lim_{\alpha}\text{-}q\text{-prop } x_\alpha\} \text{ où } \forall\alpha \ x_\alpha \in E\}$$

$$\bar{E} = \text{adhérence de } E.$$

Clairement, nous avons:

Proposition 7. $\lambda(E) \supseteqq \bar{E}$, $\lambda(E) \supseteqq \lambda_{qp}(E) \supseteqq \lambda_p(E) \supseteqq E$.

Nous montrerons dans la note prochaîne que ces opérations de partie d'espace rangé sont distinctes l'un de l'autre.

§ 2. **Espace quasi-séparément rangé.** Dans ce paragraphe supposons que un espace rangé R satisfait aux axioms (A), (B) de M. Hausdorff, (b) de Prof. K. Kunugi et (T_0) de M. Kolmogoroff, et que l'indicateur de R est ω. Et nous étudions le cas où, pour toute suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de l'espace rangé R, $x \in \{\lim\limits_\alpha x_\alpha\}$ entraîne $x = \lim\limits_\alpha\text{-}q\text{-prop}\, x_\alpha$. Nous disons que l'espace rangé R de cette sorte est quasi-séparément rangé.

Proposition 8. *Pour que l'espace rangé R soit quasi-séparément rangé, il faut et il suffit que, pour tous deux points x, y distincts et pour toutes suites fondamentales*

$$\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\} \text{ et } \{V_\alpha(y) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

des voisinages par rapport à x et à y réspectivement, il existe un nombre ordinal α_0 tel que l'on a

$$U_{\alpha_0}(x) \cap V_{\alpha_0}(y) = \phi.$$

Démonstration. Sur la nécessité: S'il existe duex suites fondamentales

$$\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\} \text{ et } \{V_\alpha(y) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

des voisinages par rapport à x et à y réspectivement, telles que l'on a, pour tout $\alpha (0 \leq \alpha < \omega)$,

$$U_\alpha(x) \cap V_\alpha(y) \neq \phi$$

alors il existe une suite $\{z_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de R telle que l'on a

$$z_\alpha \in U_\alpha(x) \cap V_\alpha(y) \quad (0 \leq \alpha < \omega).$$

Alors on a

$$x = \{\lim_\alpha z_\alpha\} \quad \text{et} \quad y \in \{\lim_\alpha z_\alpha\}.$$

Donc, par la supposition, on a

$$x = \lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\ z_\alpha$$

et

$$y = \lim_\alpha\text{-}q\text{-prop}\ z_\alpha.$$

Par conséquent $x = y$.

La suffisance est claire. c. q. f. d.

Corollaire 1. *Un espace quasi-séparément rangé est un espace séparé.*[3]

Corollaire 2. *Dans un espace quasi-séparément rangé R, sur toute suite fondamentale $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à un point x quelconque de R, on a*

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(x) = \{x\}.$$

Dans l'espace quasi-séparément rangé R, pour toute partie E de R, on a $\lambda(E) = \lambda_{qp}(E)$.

3) c'est-à-dire qu'il est satisfait à l'axiom de séparation (D) ou (T_2) de M. Hausdorff.

Inversement, dans un espace rangé R, si l'on a, pour toute partie E de R, $\lambda(E)=\lambda_{qp}(E)$, alors de chaque point x de R et de toute suite fondamentale

$$\{V_\alpha(x) \mid 0\leq\alpha<\omega\}$$

des voisinages par rapport à x, on a $\bigcap_\alpha V_\alpha(x)=\{x\}$.

Car si l'on a $y\in\bigcap_\alpha V_\alpha(x)$, alors on a $x\in\lambda(\{y\})$ donc on a $x\in\lambda_{qp}(\{y\})$. Par conséquent on a $x=y$.

Proposition 9. *Pour toute partie E d'un espace rangé R, si l'on a*

$$\lambda(E)=\lambda_{qp}(E)$$

alors l'espace R est quasi-séparément rangé.

Démonstration. Soient x, y deux points distincts de R et soient $\{V_\alpha(x)\}$ et $\{U_\alpha(y)\}$ deux suites fondamentales des voisinages par rapport à x et à y réspectivement.

Pour tout nombre $\alpha(0\leq\alpha<\omega)$ s'il existe un point z_α tel que

$$z_\alpha\in V_\alpha(x)\cap U_\alpha(y)$$

alors on a

$$x,\ y\in\{\lim_\alpha z_\alpha\}.$$

Parce que

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(x)=\{x\} \text{ et } \bigcap_\alpha U_\alpha(y)=\{y\}$$

on peut supposer que, pour tout α, on a

$$z_\alpha\neq x \text{ et } z_\alpha\neq y.$$

Soit que $E=\{z_\alpha\}$, alors on a

$$x\in\lambda(E)=\lambda_{qp}(E).$$

Donc il existe une suite

$$\{z_{\alpha(\beta)} \mid 0\leq\beta<\omega\}$$

partielle de $\{z_\alpha\}$ telle que l'on a

$$x=\lim_\beta\text{-}q\text{-prop}\, z_{\alpha(\beta)}.$$

Et soit que $E_1=\{z_{\alpha(\beta)}\}$, alors on a

$$y\in\lambda(E_1)=\lambda_{qp}(E_1).$$

(Parce que $\{z_{\alpha(\beta)}\}$ est partielle de $\{z_\alpha\}$). Donc il existe une suite

$$\{z_{\alpha(\beta(\gamma))} \mid 0\leq\gamma<\omega\}$$

partielle de $\{z_{\alpha(\beta)}\}$ telle que l'on a

$$y=\lim_\gamma\text{-}q\text{-prop}\, z_{\alpha(\beta(\gamma))}.$$

Ce contredit la relation

$$x=\lim_\gamma\text{-}q\text{-prop}\, z_{\alpha(\beta(\gamma))}$$ c. q. f. d.