124. *Sur la méthode des espaces rangés.* II

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. June 13, 1966)

1. Dans cette Note, nous servirons de la même terminologie introduite dans "Sur la méthode des espaces rangés. I", qu'on citera comme [M.E.R.I]. Nous y avons donné deux notions de la limite: la limite (simple) et la limite propre. Pour que ces deux notions coïncident, il suffit de se placer dans l'hypothèse suivante:

Axiome (D^*). Soit R un espace rangé. Pour toute paire (p, q) de deux points distincts p et q, il existe un nombre ordinal $\alpha_0 = \alpha_0(p, q)$, $0 \leq \alpha_0 < w$, tel que toute paire d'un voisinage $V(p)$ de p et d'un voisinage $U(q)$ de q, n'ont aucun point en commun dès que $V(p)$ et $U(q)$ appartiennent à la somme des $\mathfrak{U}_\beta$, β étant des nombres quelconques tels que $\alpha_0 \leq \beta < w$.

Nous pouvons exprimer ce fait par la

Proposition 5. *Dans l'espace rangé, où l'axiome (D^*) est satisfait la limite (simple) et la limite propre coïncident.*

D'ailleurs, la démonstration de la Proposition est très simple.

2. *Notions relatives.* Soient R, A un espace rangé et un de ses ensembles de points. À tout point a de A et à tout voisinage $V(a)$ de a, considéré dans l'espace R, nous donnons un ensemble de points de A défini par la relation

$$V(a, A) = A \cap V(a).$$

Nous appelons $V(a, A)$ un voisinage du point a, considéré *relativement à A*.

Si l'espace R satisfait respectivement à l'axiome (a),[1] l'axiome (b),[2] l'axiome (A),[3] l'axiome (T_0)[4] ou l'axiome (D^*), il s'ensuit de là que nous ayons l'axiome correspondant comme il suit:

l'axiome $(a)'$. Pour tout voisinage $v(a, A)$ du point a (a étant un point quelconque de A) et pour tout nombre α tel que $0 \leq \alpha < \omega$, il existe un nombre β et un voisinage $u(a, A)$ de a tels qu'on ait à la fois

$$\alpha \leq \beta < \omega, \; u(a, A) \subseteq v(a, A), \; u(a, A) \in \mathfrak{U}_\beta(A).$$

l'axiome $(b)'$. L'espace A lui-même est un voisinage de chaque point a de A, et il appartient à la famille $\mathfrak{U}_0(A)$.

l'axiome $(A)'$. Chaque voisinage $V(a, A)$ de a contient le point a.

1) Voir M. E. R. I, p. 319.
2) Ibid., p. 320.
3) Ibid., p. 320.
4) Ibid., p. 321.

l'axiome $(T_0)'$. De toute paire a, b de deux points distincts $a \neq b$ de A, il existe au moins un des deux, soit a par exemple, qui possède un voisinage $V(a, A)$ situé hors du point b.

l'axiome $(D^*)'$. Pour toute paire (a, b) de deux points a, b de A, il existe un nombre ordinal $\alpha_0 = \alpha_0(a, b)$, $0 \leq \alpha_0 < \omega$, tel que toute paire d'un voisinage $V(a, A)$ de a et d'un voisinage $U(b, A)$ de b, n'ont aucun point en commun, dès que $V(a, A)$, $U(b, A)$ appartient à $\mathfrak{U}_\beta(A)$, β étant un nombre ordinal quelconque tel que $\alpha_0 < \beta < \omega$.

Ici, nous définissons la famille $\mathfrak{U}_\alpha(A)$ $(0 \leq \alpha < \omega)$ des voisinages des points de A, en imposant la condition: Pour que $V(a, A)$ (a étant un point variable de A) appartienne à $\mathfrak{U}_\alpha(A)$, il faut et il suffit que $V(a)$ appartienne à $\mathfrak{U}_\alpha$. L'ensemble A devient ainsi un espace rangé. Nous disons que A est un espace rangé *induit* de l'espace rangé R.

Il fait remarquer que la profondeur de l'espace A au point a (et par suite la profondeur de l'espace A lui-même) est supérieure ou égale à la profondeur de l'espace R au point a (et à la profondeur de l'espace R lui-même.) Donc, nous pouvons prendre le même indicateur de l'espace A que celui de l'espace R.

3. *Définition de la continuité* (r) *et la continuité* (p). Soient R, S deux espaces rangés qui ont le même indicateur ω. Considérons une fonction univoque

$$y = f(x)$$

qui est définie pour tous les points x d'un ensemble A de points de R, dont les valeurs $f(x)$ appartiennent à S. Soit a_0 un point de A. Nous disons que *la fonction* $f(x)$ *est continue* (r) (*ou continué* (p) *respectivement*), si, pour toute suite $\{p_\alpha\}$ des points de A telle qu'on ait

$$a_0 \in \{\lim_\alpha p_\alpha\} \qquad (\text{ou } a_0 \in \{\lim_\alpha \text{ prop } p_\alpha\}),$$

on a

$$f(a_0) \in \{\lim_\alpha f(p_\alpha)\} \qquad (\text{ou } f(a_0) \in \{\lim_\alpha \text{ prop } f(p_\alpha)\}).$$

Une fonction est dite continue (r) ou (p) lorsqu'elle est continue (r) ou (p) (respectivement) à tous les points de son ensemble de définition.

S'il s'agit des espaces R, S où l'axiome (D^*) est satisfatit, la continuité (r) coïncide avec la continuite (p).

4. *Définition de la base.* Soient R, S deux espaces rangés qui possèdent le même indicateur ω. Supposons qu'il existe une fonction $y = f(x)$ définie sur R et dont la totalité des valeurs couvrent tout S entier. Si, de plus, $f(x)$ est bi-univoque et si, pour tout α, $0 \leq \alpha < \omega$, elle satisfait à la condition:

1) Pour tout voisinage v d'un point x_0 de R de rang α:

$v \in \mathfrak{U}_\alpha(R)$, l'image $f(v)$ de v par la fonction $f(x)$ est un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ de l'espace S qui est de rang α: $f(v) \in \mathfrak{U}_\alpha(S)$.

2) Il existe un choix $c(v)$ des ensembles qui fait correspondre, à chaque image-inverse $f^{-1}(u)$ de tous les voisinages u d'un point y_0 de l'espace S de rang α, un de ses sur-ensembles de telle sorte que $c(f^{-1}(u)$ soit un voisinage x_0 de rang α et que, si u_1 est un voisinage de y_0 de rang inferieur ou égal à α, l'inclusion $u_1 \supseteq u$ entraîne $c(f^{-1}(u_1)) \supseteq c(f^{-1}(u))$.

3) Si v est un voisinage de x_0 de rang α dans R, on a $c(v) = v$.

Dans ces conditions, la fonction $f(x)$ est son inverse $f^{-1}(x)$ sont, toutes les deux, continues (r), et ainsi nous pouvons supposer que l'espace R et S sont identiques, les deux points x_0 et $y_0 = f(x_0)$ étant identifiés l'un à l'autre. Donc, nous avons $\mathfrak{U}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{U}_\alpha(S)$ et la fonction de choix $c(v)$ est définie sur $\mathfrak{U}_\alpha(S)$, l'image $c(\mathfrak{U}_\alpha(S))$ coïndidant avec $\mathfrak{U}_\alpha(R)$. D'ailleurs, si $v \in \mathfrak{U}_\alpha R)$, on a $c(v) = v$.

En effet, si $\{V_\alpha(y_0)\}$ est une suite fondamentale des voisinages par rapport à un point y_0, c'est-à-dire une suite monotone décroissante des voisinages $V_\alpha(y_0)$ de y_0 dans S:

$$V_0(y_0) \supseteq V_1(y_0) \supseteq \cdots \supseteq V_\alpha(y_0) \supseteq \cdots$$

tels bue $V_\alpha(y_0) \in \mathfrak{U}_{\gamma_\alpha}(S)$ et que

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_\alpha \leq \cdots, \sup_\alpha \gamma_\alpha = \omega$$

et si $\{y_\alpha\}$ est une suite des points tels que $y_\alpha \in V_\alpha(y_0)$, la suite $\{c(f^{-1}(V_\alpha(y_0)))\}$ sera une suite fondamentale par rapport à x_0 dans R et le terme général contiendra $f^{-1}(y_\alpha)$. Dans ce cas, nous disons que $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ est une *base* de $\mathfrak{U}_\alpha(S)$.

L'example très simple de la base se trouve dans l'espace métrique. En effet, nous pouvons prendre comme S un espace métrique dont chaque paire des points x, p possèdent leur distance $\rho(x, p)$. Dans S, pour chaque point x et pour tout nombre reel positif r, $0 < r \leq +\infty$, nous pouvons prendre comme un des voisinages de x une sphère au centre x, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points p satisfaisant à $0 \leq \rho(x, p) < r$. Nous le désignons par $S_r(x)$. Ici, nous prenons comme indicateur le nombre ω_0. La classe $\mathfrak{U}_\alpha(x)$ $(\alpha = 0, 1, 2, \cdots)$ sera définie comme il suit:

$S_r(x) \in \mathfrak{U}_\alpha(x)$ si et seulement si $\alpha \leq 1/r < \alpha + 1$ (si $r = +\infty$, nous posons $1/r = 0$). Comme la classe $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ nous pouvons prendre la famille consistée d'une seule sphère $S1/\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, \cdots)$. $\mathfrak{U}_0(R)$ contient le seul espace S.

Nous disons que *la base est dénombrable*, si l'indicateur ω est égale à ω_0 et si, de plus, pour chaque point x de R, la famille $\mathfrak{U}_\alpha(R)$ ne contient qu'une infinité dénombrable des voisinages de x. L'espace métrique considéré comme espace rangé possède donc une base dénombrable.

5. Examples de la base dénombrable. Montrons maintenant que plusieurs espaces classiques non métriques possèdent leur base dénombrable, lorsqu'on les considère comme espaces rangés. Ainsi, *la méthode des espaces rangés est une sorte des procédés qui nous permettent d'éviter la puissance non dénombrable.*

Example 1. La notion des distributions a été introduite par M. L. Schwartz.[5] Comme un des espaces qui rattachent à la théorie des distributions, nous pouvons citer l'espace $\mathscr{D}$. Considérons un espace R_n $(n=1, 2, \cdots)$ euclidien de dimensions n dont les points p seront désignés par les coordonnées x_i $(i=1, 2, \cdots)$: $p=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $\mathscr{D}$ est la totalité des fonction réelles $\varphi=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ définie sur R_n, dérivable indéfiniement par rapport à toutes les variables et dont les valeurs s'annulent hors d'un ensemble compact, dépendant de φ.

M. L. Schwartz a donné un système de voisinages de chaque φ de $\mathscr{D}$. Comme $\mathscr{D}$ est un espace linéaire, il suffit de définir un voisinage d'un élément dit zéro, c'est-à-dire un fonction qui s'annule partout dans R_n et qui est désignée par $\varphi=0$. En effet, soit $v(0)$ un des voisinages de 0. Alors, étant donné un élément quelconque φ de $\mathscr{D}$,

$$v(0)+\varphi^{6)}$$

est un voisinage de φ, et nous supposons que tous les voisinages de φ sont ainsi obtenus. Or, pour définir $v(0)$, M. L. Schwartz a proposé de considérer d'abord une suite des boules: désignons par Ω_ν $(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ la boule $r<r$, où l'on pose $r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ et par Ω la suite infinie des $\Omega_\nu : \Omega=\{\Omega_\nu\}$. Il a pris ensuite encore deux suites infinies $\{\varepsilon\}$, $\{m\}$

$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\}$

$\{m\}=\{m_0, m_1, m_2, \cdots\}$

des nombres réels>0, et des nombres entiers≥ 0, tels qu'on ait

$$\varepsilon_0\geq\varepsilon_1\geq\varepsilon_2\geq\cdots\geq\varepsilon_n\geq\cdots;\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

$$m_0\leq m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_n\leq\cdots;\ \lim_{m\to\infty}m_n=+\infty.$$

Comme voisinages de $\varphi=0$, M. L. Schwartz a proposé de prendre

$$V(\{\mathrm{m}\}, \{\varepsilon\};\ 0)$$

l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi\in D$ qui, quel que soit ν, vérifient, pour x situé hors de Ω_ν, on a, pour chaque système $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ des nombres entiers p_i, $p_i\geq 0$

$$\left|\frac{\partial^p\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right|\leq\varepsilon_\nu,\quad \text{si}\quad p\leq m_\nu$$

5) L. Schwartz: Théorie des distributions (Actualités scientifiques et industrielles, 1091), tome 1, Paris, 1950, p. 66~69.

où l'on pose $p=p_1+p_2+\cdots+p_n$.
M. L. Schwartz a déjà remarqué que le système fondamental des voisinages de 0 donne une topologie de $\mathcal{D}$ à base non dénombrable.

Or, d'autre part, désignons par

$$U(m, l, \varepsilon; 0)$$

l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in D$ dont les supports appartiennent à Ω_l et qui vérifient

$$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad p \leqslant m.$$

Soit φ une fonction quelconque de $\mathcal{D}$. Les voisinages de φ seront $U(m, l, \varepsilon; \varphi) = U(m, l, \varepsilon; 0)+\varphi$. Désignons enfin par $\mathfrak{U}_\nu$ $(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ la famille de tous les voisinages $U(m, l, \varepsilon; \varphi)$ qui vérifient $[1/\varepsilon]=\nu+1$ et $\nu \leq m$, où $[\delta]$ désigne la partie principale du nombre δ.

La profondeur de $\mathcal{D}$ est ω_0. Prenons donc ω_0 comme indicateur de $\mathcal{D}$. L'espace $\mathcal{D}$ devient ainsi un espace rangé. Il satisfait aux axiomes (a), (b), (A), (D), et (D^*).

Or, les voisinages

$$U(m, l, 1/\nu; \varphi) \qquad (\text{pour } \nu=0, \text{ posons } 1/\nu=+\infty)$$

forment une base de cet espace rangé. Comme m, l, et ν varient $0, 1, 2, \cdots$, cette base est dénombrable.

Enfin, il faut remarquer que la convergence (r) de $\mathcal{D}$ coïncide avec celle de la pseudo-topologie introduite par M. L. Schwartz.[7]

Example 2. Citons encore un autre exemple classique. Considérons un cercle d'unité E dens un plan complexe. E sera donné par $|z| \leq 1$, $z=x+iy$ où x, y sont des variables réelles. Nous disons qu'une suite des points z_n, $|z_n|<1$ tend vers un point p, $|p|=1$, au sens de stolz, lorsque 1°) on a $\lim_{n\to\infty}|p-z_n|=0$ et 2°) qu'il existe un angle θ, positif, tel que

$$|\arg(z_n-p)-\arg p| < (\pi/2)-\theta, \qquad n=1, 2, \cdots.$$

Étant donnés deux nombres réels positifs ε, δ, considérons un ensemble des points $V(\varepsilon, \delta; p)$ de tous les points z de E, satisfaisant a deux inegalites:

1°) $|z-p|<\varepsilon$,

2°) si $z \neq p$, nous avons

$$|\arg(z-p)-\arg p| < (\pi/2)-\delta.$$

Nous disons que $V(\varepsilon, \delta; p)$ est un voisinage du point p qui est de rang n, ou l'on pose $n=[1/\varepsilon]$.

D'autre part, si p est situé dans l'intérierur du cercle: $|p|<1$,

6) Étant donnés deux ensembles A et B d'un espace linéaire, nous désignons par $A+B$ l'ensemble de tous les points x de la forme $x=a+b, a\in A, b\in B$. (φ) est l'ensemble constitué d'un seul element φ.

7) Loc. cit. p. 24.

nous pouvons considérer comme d'habitude, l'ensemble $V(\varepsilon; p)$ de tous les points z de E satisfaisant à deux inégalités

$$|z|<1 \quad \text{et} \quad |z-p|<\varepsilon$$

et nous pouvons prendre cet ensemble comme un voisinage du point p de rang n, $n=[1/\varepsilon]$.

Ainsi, l'ensemble E devient un espace rangé. Il satisfait aux axiomes (a), (b), (A), et (D^*).

Or, les voisinages

$V(1/n, 1/m; p)$ pour $|p|=1$; $V(1/n; p)$ pour $|p|<1$, forment une base des familles de voisinages qui est dénombrable.

Remarque. La méthode des espaces rangés est une généralisation de celle des espaces métriques. Celle-ci a été introduite par M. M. Fréchet[8] en 1905. Mais, en même temps, il a donné, non seulement cette méthode, mais encore celle des espaces (L), qui est plus générale. Bien qu'elle est généralisée, à son tour, plutard par Moore et Smith, l'idée de M. M. Fréchet est en rapport avec des suites dénombrables. Or, comme nous l'avons expliqué dans cette Note, chose curieuse, *la méthode des espaces rangés nous permet d'éviter souvent l'introduction des notions non dénombrables* (voir Examples 1 et 2 donnés plus haut). Donc, nous pourrons dire que la méthode des espaces rangés pour le cas où l'indicateur est ω_0, étant située entre la méthode des espaces métriques et celle des espaces (L) de M. M. Fréchet, ressemble beaucoup à la première.