# 247. *Sur les convergences dans l'espace rangé. II*

Par Yukio YOSHIDA

Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1966)

Continuant la note précédente [6], nous allons étudier les convergences dans les espaces rangés:[1] sur les conditions pour que la limite simple coïncide avec la limite propre ou avec la limite ordinaire et sur les para-convergences.[2]

Dans cette note, supposons que $R$ soit un espace rangé satisfaisant aux conditions (A) et (B) de M. Hausdorff et ayant l'indicateur $\omega$.[3]

**§ 2. Espace quasi-séparément rangé** (continué). Si $R$ est quasi-séparément rangé, alors pour chaque suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de $R$, $\{\lim_\alpha x_\alpha\}$ consiste en un point au plus.[4] La réciproque de cette assertion est aussi exacte. Donc nous avons:

**Proposition 10.** *Pour que de chaque suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de $R$, $\{\lim_\alpha x_\alpha\}$ consiste en un point au plus, il faut et il suffit que l'espace $R$ soit quasi-séparément rangé.*

**§ 3. Espace séparément rangé.** Dans ce paragraph, nous étudions les espaces rangés qui satisfont à l'axiome de séparation $(T_0)$ et dans lesquels la limite simple coïncide avec la limite propre. ([2] p. 322) Nous disons que l'espace rangé de cette sorte est *séparément rangé*.

**Proposition 11.** *L'espace séparément rangé est un espace quasi-séparément rangé. Donc il est séparé.*

**Proposition 12.** *Pour qu'un espace quasi-séparément rangé $R$ soit séparément rangé, il faut et il suffit que, pour tous deux points distincts $x$ et $y$ de $R$ et pour toute suite fondamentale*

$$\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

*des voisinages par rapport à $x$, il existe un nombre ordinal $\beta_0 (0 \leq \beta_0 < \omega)$ tel que tout voisinage $U(y)$ de $y$ de rang supérieur à $\beta_0$, ne contenant pas $x$, soit disjoint d'un term $V_{\alpha_0}(x)$ de $\{V_\alpha(x)\}$.*

Démonstration. Sur la nécessité: Soient $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite fondamentale des voisinages par rapport à un point $x$ de $R$ et

1) Sur les espaces rangés, voir [1], [2], et [3].

2) Nommées par Prof. K. Kunugi. M. H. Okano a étudié les convergences dans l'espace rangé de ce point de vue. Voir [4] et [5].

3) $\omega$ est un nombre ordinal limite inaccessible. Voir [2] p. 319.

4) L'espace quasi-séparément rangé satisfait à l'axiome de séparation $(T_0)$ de M. Kolmogoroff. Voir [6] p. 475 et p. 474 proposition 5.

soit $y$ un point de $R$ distinct de $x$.

Supposons que, pour tout nombre ordinal $\beta(0 \leq \beta < \omega)$, il existe un voisinage $U_\beta(y)$ du point $y$ de rang supérieur à $\beta$, ne contenant pas $x$ et ayant des points communs avec tout term $V_\alpha(x)$ de $\{V_\alpha(x)\}$. Alors pour tout $\beta(0 \leq \beta < \omega)$ il existe une suite

$$\{x_\alpha^\beta \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

des points de $R$ telle que l'on a

$$x_\alpha^\beta \in V_\alpha(x) \cap U_\beta(y).$$

Si l'on arrange tous les points $x_\alpha^\beta(0 \leq \beta < \alpha < \omega)$ de façons que $x_\alpha^\beta$ précède $x_{\alpha'}^{\beta'}$ lorsque $\alpha < \alpha'$ ou que $\alpha = \alpha'$ et $\beta < \beta'$, alors $\{x_\alpha^\beta \mid 0 \leq \beta < \alpha < \omega\}$ devient une suite bien ordonnée de type $\omega$, parce que le nombre $\omega$ est limite inaccessible. Désignons-la par $\{z_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$. Alors on voit sans peine que

$$x \in \{\lim_\alpha z_\alpha\}$$

et que

$$x \neq \operatorname*{lim\text{-}prop}_\alpha z_\alpha.$$

Donc, l'espace $R$ n'est pas séparément rangé.

Sur la suffisance: Soient $x$ et $y$ deux points distincts et soit $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite des points de $R$. Et supposons que $x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\}$ et que la suite fondamentale $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à $x$ définisse cette relation. Puisque l'espace $R$ est quasi-séparément rangé, on a

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(x) \not\ni y.$$ [5]

De plus, soit $\beta_0$ un nombre ordinal défini par la supposition pour $\{V_\alpha(x)\}$ et pour $y$. Alors, pour tout voisinage $U(y)$ de $y$ et de rang supérieur à $\beta_0$, ne contenant pas $x$, la suite $\{x_\alpha\}$ est résiduelle dans la complimentaire de $U(y)$. Donc, nous avons:

$$x = \operatorname*{lim\text{-}prop}_\alpha x_\alpha.$$

Par conséquent, $R$ est séparément rangé. c.q.f.d.

**Corollaire.** *Espace rangé satisfaisant à l'axiome* ($D^*$) *de Prof. K. Kunugi* ([3] p. 549) *est séparément rangé.*

Si un espace $R$ est séparément rangé, alors pour toute partie $E$ de $R$, on a $\lambda(E) = \lambda_p(E)$. ([6] p. 474) Mais la réciproque est inexacte. Nous l'avons montré dans [7].[6]

**§ 4. Espace rangé arborescent.** Dans ce paragraph, nous étudions les espaces rangés où la limite simple coincide avec la limite ordinaire.

**Proposition 13.** *Si une suite* $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ *des points de* $R$ *satisfaisant à l'axiome* (b) *de Prof. K. Kunugi*[7] *converge vers un*

5) Voir [6] p. 475 corollaire 2.
6) Example 6 (p. 107).
7) Voir [2] p. 320.

*point $x$ de $R$ au sens ordinaire, alors on a*

$$x \in \{\lim_{\alpha} x_\alpha\}.$$

**Définition 2.** Étant données deux suites fondamentales $\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ et $\{V_\beta(x) \mid 0 \leq \beta < \omega\}$ par rapport à $x$ de $R$ nous disons que $\{V_\beta(x)\}$ est *inférieure ou égale* à $\{U_\alpha(x)\}$ lorsque pour tout $U_\alpha(x)$ il existe un $V_\beta(x)$ tel que

$$U_\alpha(x) \supseteqq V_\beta(x).$$

Et disons que $\{U_\alpha(x)\}$ et $\{V_\beta(x)\}$ sont *équivalentes* lorsque $\{V_\beta(x)\}$ est inférieure où égale à $\{U_\alpha(x)\}$ et réciproquement.

Lorsque pour chaque point $x$ de $R$ toutes les deux suites des voisinages par rapport à $x$ sont équivalentes, nous l'appelons *espace rangé arborescent.*

**Proposition 14.** *Pour que toute suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de $R$ convergente simplement converge au sens ordinaire, il faut et il suffit que l'espace $R$ soit rangé arborescent.*

Démonstration. Sur la nécessité: Si l'espace $R$ n'est pas rangé arbarescent, il existe deux suite fondamentales $\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ et $\{V_\beta(x) \mid 0 \leq \beta < \omega\}$ par rapport à un point $x$ de $R$ telles qu'il existe un term $U_\alpha(x)$ de $\{U_\alpha(x)\}$ ne contenant aucun term $V_\beta(x)$ de $\{V_\beta(x)\}$. Alors la suite $\{x_\beta \mid 0 \leq \beta < \omega\}$ des points de $R$ telle que l'on a, pour tout $\beta (0 \leq \beta < \omega)$,

$$x_\beta \in V_\beta(x) - U_\alpha(x)$$

convergente simplement vers $x$ ne converge pas vers $x$ au sens ordinaire, parce que

$$x_\beta \notin U_\alpha(x) \qquad (0 \leq \beta < \omega).$$

Sur la suffisance: Soit $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite des points de $R$ convergente simplement vers un point $x$ de $R$, et soit $U(x)$ un voisinage quelconque de $x$. Alors, par l'axiome ($\alpha$) de Prof. K. Kunugi ([2] p. 319) il existe une suite fondamentale $\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ dont le premier term $U_0(x)$ est contenu à $U(x)$. Puisque $\{U_\alpha(x)\}$ et la suite $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ définissant la relation $x \in \{\lim_{\alpha} x_\alpha\}$ sont équivalentes, il existe un term $V_{\alpha_0}(x)$ de $\{V_\alpha(x)\}$ contenu à $U_0(x)$, donc à $U(x)$. Ce montre que, pour tout $\alpha$ supérieur à $\alpha_0$, on a

$$x_\alpha \in U(x).$$

Donc $\{x_\alpha\}$ converge vers $x$ au sens ordinaire. c.q.f.d.

**Corollaire.** *Pour que, de chaque partie $E$ d'un espace rangé $R$, on a $\lambda(E) = \bar{E}$, il faut et il suffit que l'espace $R$ soit rangé arborescent.*

**§ 5. Para-convergences.** Dans ce paragraph, nous définissons et étudions la para-convergence simple et celle quasi-propre. Elles sont les notions correspondantes à la convergence simple et celle quasi-propre respectivement. Mais, nous ne pouvons pas encore définir la para-convergence propre qui correspond à la convergence propre.

**Définition 3.** Une suite $\{V_\alpha(x_\alpha) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de voisinages des points $x_\alpha$ de $R$ sera dite *fondamentale*, si elle satisfait à trois conditions suivantes:

(1) Elle est monotone décroissante: c.-à-d.

$$V_0(x_0) \supseteqq V_1(x_1) \supseteqq \cdots \supseteqq V_\alpha(x_\alpha) \supseteqq \cdots; \ 0 \leq \alpha < \omega$$

(2) Il existe une suite monotone croissante des nombre ordinals

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_\alpha \leq \cdots; \ 0 \leq \gamma_\alpha < \omega \qquad (0 \leq \alpha < \omega)$$

tel que l'on a

$$\sup_\alpha \gamma_\alpha = \omega$$

et l'on a

$$V_\alpha(x_\alpha) \in \mathfrak{B}_{\gamma_\alpha}(x_\alpha)^{8)} \qquad (0 \leq \alpha < \omega).$$

(3) Pour tout nombre $\alpha$ $(0 \leq \alpha < \omega)$ il existe un nombre $\beta$ $(\alpha \leq \beta < \omega)$ tel que

$$\gamma_\beta < \gamma_{\beta+1}$$

et qu'il y a un voisinage $U(x_\beta)$ de rang $\gamma$ $(\gamma_\beta < \gamma \leq \gamma_{\beta+1})$ tel que

$$V_\beta(x_\beta) \supseteqq U(x_\beta) \supseteqq V_{\beta+1}(x_{\beta+1}).$$

**Définition 4.** Étant donné une suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points et un point $x$ de $R$, nous disons que $\{x_\alpha\}$ *para-converge simplement* vers $x$ ou que $x$ est *une para-limite simple* de $\{x_\alpha\}$, et nous l'écrivons par $x \in \{\pi\text{-}\lim_\alpha x_\alpha\}$ s'il existe une suite fondamentale $\{V_\alpha(x_\alpha) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de voisinages des points $x_\alpha$ telle que l'on a $x \in \bigcap_\alpha V_\alpha(x_\alpha)$.

**Définition 5.** Dans la définition 4, si la suite $\{x_\alpha\}$ et le point $x$ satisfont de plus aux deux conditions suivantes (4) et (5), alors nous disons que $\{x_\alpha\}$ *para-converge quasi-proprement* vers $x$ ou que $x$ est *une para-limite quasi-propre* de $\{x_\alpha\}$ et nous l'écrivons par $x \in \{\pi\text{-}\lim_\alpha\text{-}q \ x_\alpha\}$:

(4) Lorsque $x$ est séparé[9] d'un autre point $y$ de $R$, il existe une suite fondamentale

$$\{V_\alpha(x_\alpha) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

des voisinages de $x_\alpha$ telle que

$$\bigcap_\alpha V_\alpha(x_\alpha) \ni x \qquad \text{et} \ \not\ni y.$$

(5) Lorsqu'un point $y$ est séparé de $x$, alors pour toute suite $\{x_{\alpha(\beta)} \mid 0 \leq \beta\omega\}$ partielle[10] de $\{x_\alpha\}$ et pour toute suite fondamentale

$$\{V_\beta(x_{\alpha(\beta)}) \mid 0 \leq \beta < \omega\}$$

des voisinages de $x_{\alpha(\beta)}$

$$y \in \bigcap_\alpha V_\beta(x_{\alpha(\beta)})$$

entraîne que

---

8) $\mathfrak{B}_\alpha(x)$ signifiera la famille de tous les voisinages de rang $\alpha$ de point $x$ de $R$.

9) Disons qu'un point $x$ est séparé d'un autre point $y$ lorsqu'il existe un voisinage de $x$ ne contenant pas $y$.

10) Voir [2] p. 319.

$$x \in \bigcap_{\beta} V_\beta(x_{\alpha(\beta)}).$$

De la para-limite simple et celle quasi-propre, nous avons les propositions obtenues de cellès 1, 2, et 3 de la note [2] et de celles 2∼6 de la note [6] par remplacer "lim" par "$\pi$-lim" et "lim-$q$-prop" par "$\pi$-lim-$q$" respectivement.

Et, si l'on pose

$$\lambda^\pi(E)=\{x \mid x \in \{\pi\text{-}\lim_\alpha x_\alpha\} \text{ où } \forall \alpha x_\alpha \in E\}$$
$$\lambda^\pi_q(E)=\{x \mid x \in \{\pi\text{-}\lim_\alpha\text{-}q\ x_\alpha\} \text{ où } \forall \alpha x_\alpha \in E\}$$

alors nous avons

**Proposition 15.** $\lambda^\pi(E) \supseteqq \lambda^\pi_q(E) \supseteqq E.$

Mais, on n'a pas nécessairement $\lambda^\pi(E) \supseteqq \bar{E}$.

Sur la relation entre la para-limite simple et celle quasi-propre, nous avons:

**Proposition 16.** *Dans un espace rangé $R$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(*1*) *Pour toute suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de $R$, $\{\pi\text{-}\lim_\alpha x_\alpha\}$ consiste au plus un point.*

(*2*) *$R$ satisfait à l'axiome de séparation $(T_0)$ et pour toute $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de $R$ on a*

$$\{\pi\text{-}\lim_\alpha x_\alpha\} = \{\pi\text{-}\lim_\alpha\text{-}q\ x_\alpha\}.$$

## Références


[1] K. Kunugi: Sur les espaces complets et régulièrement complets. I, II, et III. Proc. Japan Acad., **30**, 553-556, 912-916 (1954), **31**, 49-53 (1955).

[2] ——: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

[3] ——: Sur la méthode des espaces rangés. II. Proc. Japan Acad., **42**, 549-554 (1966).

[4] H. Okano: On closed subspaces of the complete ranked spaces. Proc. Japan Acad., **33**, 336-337 (1957).

[5] ——: Sur les convergences dans l'espace rangé. Proc. Japan Acad., **37**, 99-104 (1961).

[6] Y. Yoshida: Sur les convergences dans l'espace rangé. I. Proc. Japan Acad., **42**, 473-476 (1966).

[7] ——: Quelques examples des espaces rangés concernant les convergences. Math. Japonicae, **11**, 97-108 (1966).