62. *Sur la méthode des espaces rangés. III*

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., April 12, 1967)

La notion de la convergence dans les espaces rangés, induite par Prof. K. Kunugi ([1] et [2]), peut être considérée, dans un sens, comme une généralisation de celle dans les espaces topologiques. Dans cette note, nous allons le montrer et introduire quelques notations qui sont utiles à traduire des notions sur les espaces topologiques en des notions sur les espaces rangés.

Dans toute cette note, soit R un espace rangé ayant l'indicateur ω, désignons par $\mathfrak{B}_\alpha(x)$ la famille de tous les voisinages de rang α de point x quelconque de R, et posons

$$\mathfrak{B}(x)=\bigcup_\alpha \mathfrak{B}_\alpha(x).$$

Il faut remarquer que tout point x de R possède un système $\mathfrak{U}(x)$ de voisinages satisfaisant aux axiomes (A) et (B) de M. Hausdorff, et que $\mathfrak{B}(x)$ est une base de $\mathfrak{U}(x)$.[1)]

D'abord, comparaisons deux définitions, par MM. Moore et Smith et par Prof. K. Kunugi, de la convergence d'une suite $\{x_\alpha \mid 0\leq\alpha<\omega\}$ des points de R.

MM. Moore et Smith: *La suite* $\{x_\alpha\}$ *converge vers un point* x *de* R *lorsque*

$$\forall V(x)\in\mathfrak{U}(x)\quad \exists\alpha_0(<\omega)\quad \{x_\alpha \mid \alpha_0\leq\alpha\}\subseteq V(x).$$

Prof. K. Kunugi: *La suite* $\{x_\alpha\}$ *converge vers un point* x *de* R *lorsque*

$\exists\mathfrak{U}'(\subseteq\mathfrak{U}(x))$: *une suite des voisinages par rapport à* x[2)]

$$\forall V(x)\in\mathfrak{U}'\quad \exists\alpha_0(<\omega)\quad \{x_\alpha \mid \alpha_0\leq\alpha\}\subseteq V(x).$$

En un mot, Prof. K Kunugi a employé une sous-famille $\mathfrak{U}'$ de $\mathfrak{U}(x)$ tandis que MM. Moore et Smith ont fait la famille entière $\mathfrak{U}(x)$. Il va sans dire qu'il ne convient pas que la sous-famille $\mathfrak{U}'$ ne contienne que voisinages grands. Donc, Prof. K. Kunugi a induit la notion de rang qui montre la grandeur de voisinage, et supposé que la sous-famille $\mathfrak{U}'$ contienne voisinages assez petits.

On peut remplacer, dans cettes définitions des convergences, la suite $\{x_\alpha\}$ par un ensemble des points de R supérieurement filtrant.[3)]

---

1) Axiome (a) de [1] p. 319.
2) Voir [2] p. 551.
3) "Directed set of points" en anglais.

Ensuite, ôtons monotonie de la suite des voisinages dans la définition de Prof. K. Kunugi. C'est-à-dire, supposons que la famille $\mathfrak{U}'$ soit une suite bien ordonnée (n'étant pas nécessairement monotone)

$$V_0(x),\ V_1(x),\ \cdots,\ V_\alpha(x),\ \cdots \quad ; \quad 0\leq\alpha<\omega$$

des voisinages du point x telle que tout $V_\alpha(x)$ appartienne à une famille $\mathfrak{B}_{\gamma_\alpha}(x)$ et que l'on ait $\sup\limits_\alpha \gamma_\alpha=\omega$.

Quand même on changerait ainsi la définition de la convergence, il n'y a aucun changement sur les convergences dans les espaces rangés qui satisfont à l'axiome (d)[4] suivant, par example l'espace $\mathcal{D}$ de M. L. Schwartz[5] ou l'espace métrique.

Axiome (d) *Pour toute suite bien ordonnée (n'étant pas nécessairement monotone)*

$$V_0(x),\ V_1(x),\ \cdots,\ V_\alpha(x),\ \cdots: V_\alpha(x)\in\mathfrak{B}_{\gamma_\alpha}(x)(0\leq\alpha<\alpha_0)$$

de voisinages d'un point x quelconque de R dont le type α_0 est inférieur à l'indicateur ω de R, $\bigcap\limits_\alpha V_\alpha(x)$ est un voisinage de x de rang $\sup\limits_\alpha \gamma_\alpha$.

Maintenant, nous récrivons la définition changée, en employant les nouvelles notations $B\subseteq\in\mathfrak{A}$ qui signifie que

$$\exists A\in\mathfrak{A} \qquad B\in A$$

et $\overline{\mathfrak{B}}_\beta(x)$ qui signifie $\bigcup\limits_{\beta\leq\alpha}\mathfrak{B}_\alpha(x)$.

La suite $\{x_\alpha\}$ converge vers un point x de R lorsque

$$\forall\overline{\mathfrak{B}}_\beta(x) \quad \exists\alpha_0(<\omega) \quad \{x_\alpha\mid\alpha_0\leq\alpha\}\subseteq\in\overline{\mathfrak{B}}_\beta(x).$$

Ce ressemble à la définition par MM. Moore et Smith.

La notation $B\subseteq\in\mathfrak{A}$ et autre notation $a\in\in\mathfrak{A}$ qui signifie que

$$\exists A\in\mathfrak{A} \qquad a\in A$$

sont utiles à traduire des notions sur les espaces topologiques en des notions sur les espaces rangés.

En outre, sur les convergences dans les espaces aux voisinages, en employant des sous-familles convenables de $\mathfrak{U}(x)$, on pourra avoir quelques autres définitions.

Références

[1] K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318–322 (1966).

[2] ——: Sur la méthode des espaces rangés. II. Proc. Japan Acad., **42**, 549–554 (1966).

[3] Y. Yoshida: Sur les structures des espaces ranges. II. Proc. Japan Acad., **42**, 1144–1148 (1966).

4) Axiome (d) de [3] p. 1145.

5) Voir [2] p. 552.