193. *Sur les développements orthogonaux dans* $L(p, q)$. II

Par D. Lass FERNANDEZ
Instituto de Matemática, Universidade de Campinas,
Campinas, São Paulo, Brasil

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

Dans cette Note, nous donnerons la démonstration du théorème A. Démontrons tout d'abord un proposition que nous aurons à utiliser par la suite.

La proposition 2.9. généralise le théorème 646 de [3], et pour le démontrer dans le cadre des espaces $L(p, q)$ il nous faut d'utiliser le lemme suivant dû à Lorentz [4].

2.8. Lemme. Si $p<q$, alors on a $L(q, \infty)\subset L(p, 1)$ et $\|f\|_{p1} \leq C\|f\|_{q\infty}$

2.9. Proposition. *Pour que* $\sum c_n \emptyset_n \in L(p, q)$, $1\leq p\leq \infty$ et $1\leq q \leq \infty$, *il faut et il suffit que la série*

2.9(1) $$\sum c_n \bar{\hat{g}}_n$$

soit somable pour toute suite $(\hat{g}_n)$, *des coeficients de Fourier des fonctions* $g \in L(p', q')$.

Démonstration. Soit $S(f)=\sum c_n\emptyset_n \in L(p, q)$ et $g \in L(p', q')$. Alors si p, $q\neq\infty$ ou $p=1$ et $q=\infty$, on a

$$\rho_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_j c_j\bar{\hat{g}}_j=\int_a^b \sigma_n(f\,;\,t)\overline{g(t)}dt,$$

$$|\rho_i-\rho_j|=\int_a^b |\sigma_i-\sigma_j|\,|g(t)|\,dt\leq \|\sigma_i-\sigma_j\|_{pq}\|g\|_{p'q'}.$$

Donc $|\rho_i|$ converge puisque $\|\sigma_i-\sigma_j\|_{pq}\to 0$. Si $f\in L(p, \infty)$, $1<p\leq\infty$, on utilise l'identité

$$\rho_i=\int_a^b \sigma_i(f\,;\,t)\overline{g(t)}dt=\int_a^b \overline{\sigma_i(g\,;\,t)}f(t)dt$$

et le résultat est valable pour $g\in L(p', 1)$. Supposons maintenant que

$$\rho_i=\sum a_{ik}\sum c_j\bar{\hat{g}}_j=\int_a^b \sigma_n(t)\overline{g(t)}dt$$

soit convergente, c'est à dire que 2.9(1) soit somable pour toute $g\in L(p', q')$. Donc, par le théorème de Banach-Steinhaus, on a

2.9(2) $$\|\sigma_n\|_{pq}\leq C.$$

Alors, (i) si $1\leq p<\infty$ et $1\leq q<\infty$ la conclusion s'ensuit par 2.4; (ii) si $p=1$ et $q=\infty$ on a $L(1, \infty)=L^1$ et ce cas est compris dans le cas précédent; (iii) si $1<p<\infty$ et $q=\infty$ on a $L(p, \infty)\subset L^{p-\varepsilon}$, $(\varepsilon>0)$, donc $\sigma_n\to f$ (dans $L^{p-\varepsilon}$); alors, on a $\sigma_n\to f$, p.p., et $\sigma_n^*\to f^*$ (remarquons que l'espace est de mesure finie) et par 2.9(2) on voit que $\sigma_n^*(t)\leq Ct^{-1/p}$ donc

$f^*(t)=Ct^{-1/p}$ et dans ce cas le résultat est démontré; (iv) si $p=q=\infty$ on renvoye le lecteur à [3]. La démonstration est terminé.

Montrons encore la proposition suivante.

2.10. Proposition. Soit $f \in L(p, q)$, $g \in L(p', q')$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Posons $c_n=(f\,|\,\emptyset_n)$ et $d_n=(g\,|\,\emptyset_n)$. Alors, la serie

2.10(1) $$\sum c_n \bar{d}_n$$

est T-somable et

2.10(2) $$(f\,|\,g)=\int_a^b f\bar{g}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\left(\sum_{j=0}^{k} c_n\bar{d}_n\right),$$

en particulier, si 2.10(1) est convergente, on a

2.10(3) $$(f\,|\,g)=\int_a^b f\bar{g}dx=\sum c_n\bar{d}_n.$$

Démonstration. On a

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\left(\sum_{j=0} c_n\bar{d}_n\right)=\int_a^b\left(\sum_k a_{nk}\sum_j c_j\emptyset_j\right)\bar{g}dx,$$
$$D_n=(f\,|\,g)-A_n=(f\,|\,g)-(\sigma_n\,|\,g)=(f-\sigma_n\,|\,g)$$

d'où

$$|D_n|\leq\|f-\sigma_n\|_{pq}\|g\|_{p'q'}$$

si $p, q\neq\infty$ on a $\|f-\sigma_n\|_{pq}\to 0$ et alors $D_n\to 0$, d'où $A_n\to(f\,|\,g)$. Si $p=1$ et $q=\infty$, ce cas est compris dans l'antérieur. Si $1<p\leq\infty$, on change les rôles de f et g et la démonstration est terminée.

3. Démonstration du théorèm A. Supposons que F est bien définie et soit $c \in 1(p, q')$. Soit aussi $f \in L(p, q)$ et $\hat{f}=(\hat{f}_n)$. Alors la série

$$\sum|c_n\bar{\hat{f}}_n|$$

est convergente comme on voit en utilisant l'inégalité de Hölder.

Donc par 2.9, il existe $g \in L(p', q')$, telle que $c_n=(g\,|\,\emptyset_n)$ et on a

$$F^0(1(p, q'))\subset L(p', q').$$

D'un autre côté, supposons que F est continue. On a par 2.9 et 2.10(3)

$$|(f\,|\,g)|=|\sum\bar{c}_n\hat{f}_n|=\|c\|_{pq'}\|\hat{f}\|_{p'q}=C\|c\|_{pq'}\|f\|_{p'q'}$$

et

$$\|g\|_{p'q'}=\sup_{\|f\|=1}|(f\,|\,g)|\leq C\|c\|_{pq'}.$$

Réciproquement, supposons que $F^0(1(p, q'))\subset L(p', q')$. Soit d une suite de $1(p, q')$; alors, il existe $g \in L(p', q')$ telle que $d_n=(g\,|\,\emptyset_n)$, $n=0, 1, \cdots$ Soit $f \in L(p, q)$; alors la série

$$\sum|\bar{d}_n\hat{f}_n|$$

converge. Donc $f \in 1(p', q)$ et $F(L(p, q))\subset 1(p', q)$. D'autre part, on a

$$|\sum\bar{d}_n\hat{f}_n|=|(f\,|\,g)|\leq\|f\|_{pq}\|g\|_{p'q'}\leq C\|f\|_{pq}\|d\|_{pq'}$$

et

$$\|f\|_{p'q}=\sup_{\|d\|=1}|\sum\bar{d}_n f_n|\leq C\|f\|_{pq}$$

et la démonstration est terminée.

4. Application. Nous indiquerons ici une application du théorème

A pour obtenir une généralisation d'un théorème bien connu dû à Paley (voir [8, p. 123]). Dans la démonstration il nous faut du lemme suivant dû à Stein [7] et Hirschmann [1].

4.1. Proposition. Si $f \in L^1(a, b)$ on a

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^*)^q (n)^{-\lambda q}\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty f^*(x)^p x^{\alpha p} dx\right)^{1/p}$$

où

$$0 \leq \alpha < 1/p',\ q = p \text{ et } \lambda = 1/q + 1/p - 1 + \alpha \geq 0.$$

4.2. Théorème. *Soit* $1 \leq p < 2 < q < \infty$ *(i). Si F est l'opérateur qui associe à chaque fonction* $f \in L^1$ *la suite* $\hat{f}$ *de ses coefficients de Fourier. Alors, on a*

4.2(1) $\quad F: L(p, r) \to 1(p', r), \quad (1 \leq r \leq \infty)$

4.2(2) $\quad F: L(2, p) \to 1(2, p),$

4.2(3) $\quad F: L(2, 2) \to 1(2, 2).$

(ii) *Si* F^0 *est l'opérateur qui associe à chaque suite de* 1_0 *la fonction* $f \in L^1$*, si elle existe, telle que* $c_n = (f \mid \emptyset_n)$, $n = 0, 1, \cdots$, *on a*

4.2(4) $\quad F^0: 1(q', r) \to L(q, r), \quad (1 \leq r \leq \infty)$

4.2(5) $\quad F^0: 1(2, q) \to L(2, q),$

4.2(6) $\quad F^0: 1(2, 2) \to L(2, 2).$

Démonstration. Evidement 4.2(3) et 4.2(6) sont des conséquences de l'égalité de Parseval. Alors, par le théorème classique de Paley, on a les applications suivantes:

4.2(7) $\quad \begin{aligned} &F: L_{p_\varepsilon} = L(p_\varepsilon, p_\varepsilon) \to 1(p'_\varepsilon, p_\varepsilon), \quad (p = 1 + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leq 1) \\ &F: L_2 = L(2, 2) \to 1_2 = 1(2, 2). \end{aligned}$

Donc par [8] on a

4.2(8) $\quad F: L(p, r) \to 1(p', r)$

où $1/p = (1-t)/p_\varepsilon + t/2$, $0 < t < 1$ et $1 \leq r \leq \infty$. D'autre part, si l'on pose $\alpha = 1/2 - 1/p$, $\alpha = -\lambda$ et $p = q$ dans 4.1, on obtient

$$\|c\|_{2p} \leq C \|f\|_{2p},$$

donc on a

$$F: L(2, p) \to 1(2, p).$$

La démonstration de (ii) est une conséquence immédiate du théorème A. Remarquons que le cas $r = 1$ dans 4.2(1) ne s'obtient pas de 4.1 et 4.2(2) ne résulte pas de 4.2(8).

On peut démontrer (ii) en faisant des modifications dans la démonstration du théorème de Paley, donné par [8]. Stein [7] et Hirschmann (1) ont obtenu des résultats analogues à (ii) par méthodes assez diférents.

L'auteur remercie vivement à M. le Professeur E. T. Oklander par les conseils et l'aide qu'il a bien voulu lui donner pendant la réalisation du travail.

References

[1] Hunt: On $L(p, q)$ spaces. L'Enseignement Mathématique, **7**, 249–276 (1966).

[2] Hirschman: A note on orthogonal systems. Pacific J. Math., **6**, 47–56 (1956).

[3] Maczmarz-Steinhaus: Theorie der orthogonalreihen. Chelsea Pub. Co., N.Y. (1951).

[4] Lorentz: Some new functional spaces. Ann. Math., **51**, 37–55 (1950).

[5] Oklander: Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewics. Cursos y Seminarios de Matematica, **20**, Buenos Aires (1965).

[6] O'Neil: Convolution operators and $L(p, q)$ spaces. Duke Math. J., **20**, 129–142 (1963).

[7] Stein: Interpolation of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc., **83**, 482–492 (1956).

[8] Zygmund: Trigonometric Series, Vol. I et II. Cambridge Univ. Press (1959).