191. *Quelques exemples des ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Dec. 12, 1969)

§1. Soient n un entier $\geqq 2$ et Ω la boule unitée de $\boldsymbol{R}^n$:

$$\Omega=\left\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n\,;\,|x|\equiv\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}<1\right\}. \tag{1}$$

Traitons, dans Ω, un opérateur différentiel L elliptique dégénéré au bord

$$Lu(x)=-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(1-|x|^2)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}+(n-1)u(x). \tag{2}$$

L est auto-adjoint positif dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathscr{D}[L]=\{u(x)\in H^1(\Omega)\,;\,(1-|x|^2)u(x)\in H^2(\Omega)\}$. L est un cas particulier des opérateurs traités par Baouendi-Goulaouic [2]. Son spectre se consiste des valeurs propres positives dont chacune est de multiplicité finie. L'invariance de L par rapport aux rotations nous facilite de calculer toutes ces valeurs propres et les fonctions propres correspondantes: Définissons une suite double $\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ et une autre suite $\{\mu(k)\}_{k=0}^\infty$ en posant

$$\lambda_{k,l}=(2l+1)(2l+2k+n-1),\quad \text{pour}\quad k,l=0,1,2,\cdots; \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\mu(0)=1 \quad \text{et} & \mu(k)=2 & \text{pour}\quad k\geqq 1, & \text{si}\quad n=2;\\ \mu(k)=(2k+n-2)\dfrac{(k+n-3)!}{k!(n-2)!} & & \text{pour}\quad k\geqq 0, & \text{si}\quad n\geqq 3.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Proposition 1. (α) *$\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^\infty$ est la totalité des valeurs propres de L dont chacune $\lambda_{k,l}$ est de la multiplicité $\mu(k)$;*

(β) *Pour (k,l) fixe, une base des fonctions propres correspondant à $\lambda_{k,l}$ est formée par les fonctions de la forme*

$$u_{k,l,\nu}(x)=H_{k,\nu}(x)P_{k,l}(|x|^2), \tag{5}$$

où ν varie de 1 à $\mu(k)$, $\{H_{k,\nu}(x)\}_{\nu=1}^{\mu(k)}$ est une base des polynômes harmoniques homogènes d'ordre k, et les $P_{k,l}(t)$ sont des polynômes de t d'ordre l tels que $P_{k,l}(0)\neq 0$.

Preuve. Nous savons l'hypoellipticité de L (voir [2]). Résolvons l'équation $Lu=\lambda u$ par séparation des variables radiale et sphériques. Quel que soit $\lambda\in\boldsymbol{C}$, on obtient une solution formelle de $Lu=\lambda u$. Mais la demande $u\in\mathscr{D}[L]$ implique que λ est l'une des $\lambda_{k,l}$ ci-dessus et que u est une combinaison linéaire des fonctions de la forme (5). C.Q.F.D.

Soit maintenant $T>0$ et désignons par $N(T)$ la somme des $\mu(k)$ telles que $\lambda_{k,l}\leqq T$. Alors, nous avons facilement le théorème suivant:

Theoreme 1. *Lorsque T tend vers $+\infty$, $N(T)$ se comporte asymptotiquement*

$$N(T) \sim \frac{T}{4} \log \cdot T, \qquad si \quad n=2;$$
$$N(T) \sim \frac{2^{1-n}}{(n-2)(n-1)!} T^{n-1}, \quad si \quad n \geqq 3. \tag{6}$$

Nous définissons enfin une ζ-fonction d'Epstein $\zeta_L(s)$ pour L en posant

$$\zeta_L(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mu(k) \lambda_{k,l}^{-s}. \tag{7}$$

(Bochner [3] l'appelle plutôt série de Dirichlet). Il est facile de voir que $\zeta_L(s)$ est holomorphe dans $\mathrm{Re} \cdot s > n-1$. Pour chercher le pôle le plus à droite, calculons d'abord très grossièrement: Si $n=2$, on voit que

$$\zeta_L(s) - \frac{1}{4(s-1)^2} - \frac{1}{2(s-1)} \int_0^1 (1-t) \zeta\left(2; t+\frac{1}{2}\right) dt \tag{8}$$

est holomorphe dans $\mathrm{Re} \cdot s > 1/2$, où $\zeta(z; a) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+a)^{-z}$ ($\mathrm{Re} \cdot z > 1$ et $a > 0$) est la ζ-fonction de Riemann. Si $n \geqq 3$, on voit aussi que

$$\zeta_L(s) - \frac{2^{1-n}}{(n-2)(n-2)!(s-n+1)} \tag{9}$$

est holomorphe dans $\mathrm{Re} \cdot s > n-(3/2)$. Un raisonnement plus rigoureux nous donne enfin le résultat suivant:

Theoreme 2. *Soit* $n \geqq 2$. *Alors,* $\zeta_L(s)/\{\Gamma(s-n+1)\Gamma(2s-n)\}$ *est une fonction entière de* s.

Remarque. Si $n=2$, $\zeta_L(s)$ est holomorphe même au point $s=1/2$. Donc, ce théorème n'est pas le meilleur résultat possible sur les sigularítés de $\zeta_L(s)$.

Preuve du Théorème 2. Définissons, pour α et β complexes,

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=l}^{\infty} (2l+1)^{-\alpha} (2p+1)^{-\beta}. \tag{10}$$

Alors, nous avons

$$\zeta_L(s) = 2F(s, s) - 2^{-2s} \zeta(2s; 1/2), \quad si \quad n=2; \tag{11}$$
$$\zeta_L(s) = \frac{2^{3-n}}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (-1)^j F(s-j, s-n+2+j) + \sum_{h+j \leqq n-3} c_{jh} F(s-j, s-h), \quad si \quad n \geqq 3, \tag{12}$$

avec de certains coefficients c_{jh} indépendants de s. Nous savons que $\zeta(z; a) - (z-1)^{-1}$ est une fonction entière de z (pour $a > 0$ fixé). Donc, nous sommes ramenés à étudier les singularités de $F(\alpha, \beta)$. Nous voyons que $F(\alpha, \beta)$ et la fonction

$$f(\alpha, \beta; x, y) = \int_0^{\infty} du \int_u^{\infty} (2u+x+1)^{-\alpha} (2v+y+1)^{-\beta} dv (x, y > 0) \tag{13}$$

ont exactement les mêmes singularités en (α, β), et que $f(\alpha, \beta; x, y) /\{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta-2)\}$ est une fonction entière de (α, β), d'où le théorème. C.Q.F.D.

L'auteur a été communiqué que M. Boutet de Monvel a récemment obtenu un résultat analogue à ce paragraphe pour le même opérateur mais par une méthode différente.

§2. Nous passons au deuxième exemple. Soit $n \geqq 2$, et désignons

$$\Omega=\{x=(x', x_n)=(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \, ; \, x_n>0\} \tag{14}$$

le demi-espace euclidien. Traitons, dans Ω, un opérateur différentiel L elliptique dégénéré du second ordre

$$Lu(x)=-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{x_n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\}+(a^2 x_n+b)u(x), \tag{15}$$

où les a et b soient des constantes telles que $0 \leqq b < a$. Alors, L est auto-adjoint $\geqq bI$ dans $L^2(\Omega)$ du domaine $\mathscr{D}[L]=\{u(x) \in H^1(\Omega)\, ; \, x_n u(x) \in H^2(\Omega)\}$. Nous allons considérer le problème de Cauchy pour l'opérateur parabolique $\dfrac{\partial}{\partial t}+L$, où $t>0$ est la variable du temps qu'on ajoute de nouveau. Alors, quel que soit $f(x) \in \mathscr{D}[L]$, il existe la solution unique $u(t, x)$ dans l'espace fonctionnel $\mathcal{E}=W^{1,\infty}(\boldsymbol{R}_+\, ; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}_+\, ; \mathscr{D}[L])$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x)+Lu(t, x)=0, & \text{pour} \quad (t, x) \in \boldsymbol{R}_+ \times \Omega\, ; \\ u(+0, x)=f(x), & \text{pour} \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{16}$$

Et, de plus la solution s'exprime par un noyau de Green. Posons a priori

$$\tilde{K}(t\, ; \xi', x_n, y_n)=\frac{\rho e^{-bt}}{\sinh(\rho t)} \cdot I_0\left(\frac{2\rho\sqrt{x_n y_n}}{\sinh(\rho t)}\right) \cdot \exp\{-\rho(x_n+y_n) \coth(\rho t)\},$$

$$\text{pour} \quad t>0\, ; \, \xi' \in \boldsymbol{R}^{n-1}\, ; \, x_n, y_n>0, \quad \text{où} \quad \rho=(|\xi'|^2+a^2)^{1/2}\, ; \tag{17}$$

ici, I_0 est la fonction de Bessel modifée d'ordre 0. Soit encore

$$K(t\, ; x', x_n, y_n)=(2\pi)^{1-n} \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} e^{ix'\cdot\xi'} \tilde{K}(t\, ; \xi', x_n, y_n) d\xi'$$

$$\text{pour} \quad x' \in \boldsymbol{R}^{n-1}, x_n>0 \quad \text{et} \quad y_n>0. \tag{18}$$

Proposition 2. *Soit* $f(x) \in \mathscr{D}(\bar{\Omega})$. *Alors, la solution unique* $u(t, x) \in \mathcal{E}$ *du problème de Cauchy* (16) *s'exprime*

$$u(t, x)=\int_\Omega K(t\, ; x'-y', x_n, y_n) f(y) dy. \tag{19}$$

Preuve. Posons $v(t, \xi)$ (resp. $g(\xi))=\int_\Omega e^{-ix\cdot\xi} u(t, x)$ (resp. $f(x))dx$.

Alors, l'équation (16) se transforme en

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t, \xi)+i(|\xi|^2+a^2)\dfrac{\partial v}{\partial \xi_n}(t, \xi)+(i\xi_n+b)v(t, \xi)=0, \quad \text{si} \quad t>0, \\ v(+0, \xi)=g(\xi). \end{cases} \tag{20}$$

Nous effectuons encore la transformation de Laplace par rapport à t, et obtiendrons une équation différentielle ordinaire par rapport à ξ_n à paramètres $(\lambda, \xi') \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}^{n-1}$ (λ désigne la variable duale à t). Cette équation-ci se résoud, si l'on remarque que $g(\xi)$ et la solution cherchée sont holomorphes dans le demi-plan Im. $\xi_n < 0$ (pour (λ, ξ') fixé). Enfin, la transformation réciproque de Laplace nous donne la forme concrète de v:

$$v(t,\xi) = \rho e^{-bt} g(\xi', \zeta_n(t,\xi)) \cdot \{i\xi_n \sinh(\rho t) + \rho \cosh(\rho t)\}^{-1}$$
$$\text{où} \quad \zeta_n(t,\xi) = -\frac{\rho\{\rho \sinh(\rho t) + i\xi_n \cosh(\rho t)\}}{\xi_n \sinh(\rho t) - i\rho \cosh(\rho t)}. \tag{21}$$

L'image réciproque de Fourier $u(t, x)$ de $v(t, \xi)$ a son support dans $\bar{\Omega}$, elle appartient à $\mathcal{E}$, et satisfait à (16). Donc, $u(t, x)$ ainsi définie est la solution cherchée. Si nous l'écrivons sous la forme (19), nous avons

$$\int_\Omega e^{-ix\cdot\xi} K(t\,;\,x', x_n, y_n)dx$$
$$= \frac{\rho e^{-bt}}{i\xi_n \sinh(\rho t) + \rho \cosh(\rho t)} \cdot \exp\{-iy_n \zeta_n(t,\xi)\}$$
$$\text{pour} \quad t>0, \xi \in \boldsymbol{R}^n \quad \text{et} \quad y_n > 0. \tag{22}$$

D'où le résultat. C.Q.F.D.

Maintenant, nous définissons une ζ-fonction d'Epstein pour L défini par (14). Naturellement, le trace $K(t\,;\,0, x_n, x_n)$ du noyau K n'est plus intégrable dans Ω, car il ne dépend pas de x'. Alors, nous posons

$$\zeta_L(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} dt \int_0^\infty K(t\,;\,0, x_n, x_n)\,dx_n, \tag{23}$$

d'abord pour Re$\cdot s > n-1$. Et, nous avons une propriété méromorphe du prolongement analytique de $\zeta_L(s)$:

Theoreme 3. *Soit $\zeta_L(s)$ définie par* (23). *Alors,* $(s-1)\zeta_L(s)$ $/\Gamma(s-n+1)$ *est une fonction entière de s, si* $0 \leqq b < a$. *Si, en particulier,* $b=0$, $(s-1)\Gamma(s/2)\zeta_L(s)\Gamma((s-n+1)/2)$ *est déjà entière.*

Preuve. Le rapport entre (17) et (22) est évidente. Nous avons d'abord

$$\int_0^\infty \tilde{K}(t\,;\,\xi', x_n, x_n)dx_n = \frac{e^{-bt}}{2\sinh(\rho t)}. \tag{24}$$

Pour obtenir $\zeta_L(s)$, il faut intégrer par rapport à ξ' et ensuite en t. Nous changeons l'ordre de ces intégrations, et trouvons finalement

$$(2\sqrt{\pi})^n a^{s+1-n} \Gamma(s) \zeta_L(s)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \left(\frac{-b}{a}\right)^k \zeta\left(s+k\,;\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k+1-n}{2}\right), \tag{25}$$

d'où le théorème. C.Q.F.D.

§ 3. Soit encore $n \geqq 2$, et soit maintenant Ω un ouvert borné quelconque de $\boldsymbol{R}^n$ à frontière Γ de classe C^∞. Supposons que Ω soit situé localement à un seul côté de Γ. En généralisant l'opérateur traité dans le paragraphe 1, nous posons

$$Lu(x) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{\varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right\} + c(x)u(x),$$

où $\varphi(x)$ soit une fonction de classe $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ positive dans Ω telle qu'il existe une constante positive δ de sorte que

$$\varphi(x)=\text{dis.}(x, \Gamma), \quad \text{si} \quad \text{dis.}(x, \Gamma) \leqq \delta \quad \text{et} \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{27}$$

et $c(x)$ soit aussi de classe $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ positive sur $\bar{\Omega}$. L est un exemple assez général du genre d'opérateurs de Baouendi-Goulaouic [2]. L est auto-adjoint défini positif du domaine $\mathcal{D}[L]=\{u(x) \in H^1(\Omega)\,;\, \varphi(x)u(x) \in H^2(\Omega)\}$. Le spectre de L se consiste des valeurs propres positives dont chacune est de multiplicité finie. Notons-les $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ suivant l'ordre de croissance, où l'on compte chaque λ_j à sa multiplicité. Le résultat le plus important de la théorie spectrale conne jusqu'à maintenant est le suivant:

Theoreme (Baouendi-Goulaouic [2]). *Soit* $n \geqq 2$. *Désignons* λ_j *la* j*-ième valeur propre de* L *défini par* (26). *Alors, nous avons*

(1°) $$\lim_{j\to\infty}.(\lambda_j \cdot j^{-2/n})=0, \quad \textit{et}, \tag{28}$$

(2°) $$\lim_{j\to\infty}.\left(\lambda_j \cdot j^{\varepsilon-\frac{1}{n-1}}\right)=+\infty, \quad \textit{quel que soit } \varepsilon>0. \tag{29}$$

Il est naturel de nous demander si nous pouvons déterminer le comportement asymptotique *exact* des valeurs propres comme dans le cas classique non dégénéré (voir par exemple Arima-Mizohata [1]). Jusqu'à présent, nous n'avons aucune réponse définitive présentée sur ce sujet. Ce qui est évident est la propriété méromorphe des ζ-fonctions $\zeta_L(s\,;x, y)$ et $\zeta_L(s\,;x)$ (pour x et y dans Ω distincts) que Bochner a définies dans [3]. Pour x et y fixés dans l'intérieur de Ω, ces fonctions-ci se comportent somme si L n'était pas dégénéré. Mais, quant à la fonction

$$\zeta_L(s)=\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}, \tag{30}$$

nous ne connaissons que la convergence (et l'holomorphie) pour $\mathrm{Re}\cdot s>n-1$. Alors, il sera intéressant d'examiner la validité d'une conjecture que voici:

Conjecture. *Soient* $n \geqq 2$ *et* $\zeta_L(s)$ *définie par* (30). *Alors,*

(1°) *La fonction* $\zeta_L(s)$, *qui est holomorphe dans* $Re\cdot s>n-1$, *est méromorphe dans le s-plan complexe tout entier, et ses pôles sont tous situés sur l'axe réel;*

(2°) *Le vrai pôle le plus à droite est* $s=n-1$; *il est double lorsque* $n=2$, *et il est simple lorsque* $n \geqq 3$;

(3°) *Dans le développement de Laurent de* $\zeta_L(s)$ *au point* $s=n-1$, *désignons par* C_n *le coefficient de* $(s-1)^{-2}$ *lorsque* $n=2$, *et le coefficients de* $(s-n+1)^{-1}$ *lorsque* $n \geqq 3$. *Alors, ce coefficient* C_n *divisé par l'aire* $|\Gamma|$ *de la frontière* Γ *est une constante positive universelle qui ne dépend que de la dimension* n (*Signalons la particularité de* L *que l'on voit dans* (26) *et* (27)).

Si le point (2°) de cette conjecture était correct, nous aurions le comportement asymptotique exact (mais seulement pour $n \geqq 3$) via un théorème taubérien d'Ikehara.

Pour terminer, láuteur tient à remercier à Monsieur le Professeur T. Kotake des discussions si fructueuses avec lui.

Références

[1] Arima, R., et Mizohata, S.: J. Math. Kyoto Univ., **4**, 245–254 (1964).
[2] Baouendi, M. S., et Goulaouic, C.: C. R. A. S. Paris, série A, **226**, 336–338 (1968), et à paraître dans l'Arkiv Rat. Mech. (1969).
[3] Bochner, S.: Ann. Math., **57** (1), 32–56 (1953).