96. *Une proposition équivalente au théorème de Zermelo*

Par Ofelia Teresa Alas
Institut de Mathématiques, Université de São Paulo,
São Paulo, Brésil

(Comm. by Kinjirô Kunugi, M. J. A., May 12, 1970)

1. Introduction. Le système axiomatique de la théorie des ensembles sur lequel sont basées nos considérations est celui de Zermelo-Fraenkel, sans, évidemment, l'Axiome du Choix. Quels que soient les ensembles X et $Y, p(X)$ désigne l'ensemble des parties finies de X; $X \sim Y$ signifie qu'il y a une fonction injective de X dans Y; $X \approx Y$ signifie que X et Y sont équipotents. La négation de $X \sim Y$ sera désignée par $X \not\sim Y$. Le but de cette note est de démontrer que la proposition suivante équivaut au théorème de Zermelo: *Quels que soient les ensembles infinis A et B, si $p(A) \approx p(B)$ et $A \sim B$, alors $A \approx B$.*

2. Les considérations suivantes se trouvent dans [3] (voir aussi [4]). Nous allons donner une esquisse de la construction de l'ensemble $\boldsymbol{H}$, introduit par M. E. Farah.

Soit E un ensemble non vide et Ω l'ensemble des bons ordres sur des parties de E. Pour chaque $\omega \in \Omega$, E_ω désigne la partie de E sur laquelle ω est un bon ordre. Dans Ω on considére la relation d'équivalence: $\omega_1 \equiv \omega_2$ (mod. R) si et seulement si E_{ω_1} est semblable à E_{ω_2}. Soint $\boldsymbol{H}$ l'ensemble quocient de Ω par la relation R, et considérons, sur $\boldsymbol{H}$, l'ordre suivant: $u \leq v$ $(u, v \in \boldsymbol{H})$ si et seulement s'il y a une application strictement croissante de E_{ω_1} dans E_{ω_2}, où $\omega_1 \in u$ et $\omega_2 \in v$, telle que l'image de tout segment de E_{ω_1} est un segment de E_{ω_2}. (Cette définition ne dépend pas du choix des éléments ω_1 et ω_2, appartenant, respectivement, à u et v.) L'ensemble $\boldsymbol{H}$ est bien ordonné par l'ordre $u \leq v$ ([3], théorème 2, page 43); en outre, il n'y a pas une fonction injective g de $\boldsymbol{H}$ dans E, avec $g(\boldsymbol{H}) \neq E$ ([3], page 57).

Nous allons faire appel au théorème de Bernstein-Cantor ([5], page 92) et au lemme suivant, dû à M. Tarski:

Lemme. *Soient X et Y deux ensembles disjoints, le premier bien ordonné, qui verifient $X \cup Y \approx X \times Y$. Alors X est équipotent à une partie de Y, ou bien, Y est équipotent à une partie de X* ([6]).

3. Considérons, maintenant, la proposition ennoncée au §1, c'est à dire, la proposition (I): *Quels que soient les ensembles infinis A et B, si $p(A) \approx p(B)$ et $A \sim B$, alors $A \approx B$.*

Or, si l'on admet le théorème de Zermelo, et donc l'Axiome du Choix, on a, pour tout ensemble infini A, $p(A) \approx A$; par conséquent (I) est verifiée.

Supposons, maintenant, que la proposition (I) soit satisfaite et montrons que si M est un ensemble quelconque, M peut être bien ordonné. En supposant $M \neq \emptyset$ (le cas $M=\emptyset$ est tout à fait trivial) prenons $E=N\times M$, $D=N\times H\times\{1\}$ et $F=N\times E\times\{2\}$, où N désigne l'ensemble des nombres entiers positifs. Or, l'ensemble D peut être bien ordonné parce que H et N sont bien ordonnés; en outre $D\cap F=\emptyset$ et $D\not\precsim F$, car $H\not\precsim E$ (on remarquera que $N\times E\approx E$). Cela posé, considérons un ensemble quelconque $X\in p(D\times F)$ et posons $X'=\{a\in D\mid (\{a\}\times F)\cap X\neq\emptyset\}$. L'ensemble X' appartient à $p(D)$ et peut donc s'écrire, pour $X'\neq\emptyset$, $X'=\{a_1,\cdots,a_r\}$, où r est un nombre entier, $r\geq 1$, et $a_1<\cdots<a_r$. L'application φ de $p(D\times F)$ dans $p(N\times D\cup N\times F)$ qui associe à l'ensemble $\emptyset$ l'ensemble $\emptyset$ et associe à l'ensemble non vide X, l'ensemble

$$\varphi(X)=\bigcup_{i=1}^{r}[\{(i,a_i)\}\cup\{(i,b)\mid(a_i,b)\in X\}] \text{ est injective.}$$

D'ailleurs, en conséquence de (I) et du fait qu'on a $D\cup F\sim D\times F$, $N\times D\approx D$ et $N\times F\approx F$, il s'ensuit que $D\cup F\approx D\times F$.

Par le lemme ennoncé ci-dessus, l'ensemble F est équipotent à une partie de D. Donc, M peut être bien ordonné.

Remarque. En utilisant cette même méthode on peut démontrer que quelques autres propositions concernant les parties finies des ensembles, comme par example celle ci-dessous, sont équivalentes au théorème de Zermelo.

Proposition. *Quels que soient les ensembles infinis A et B, si A est bien ordonné, alors* $p(A\cup B)\approx p(A)\cup p(B)$ ([1]).

Références

[1] O. T. Alas: Seis proposições equivalentes ao Teorema de Zermelo (thèse). São Paulo (1967).
[2] ——: Seven propositions equivalent to the Zermelo theorem. Notices Amer. Math. Soc., **15**, 805 (1968).
[3] E. Farah: Algumas proposições equivalentes ao Axioma da Escolha. Bol. Soc. Mat. São Paulo, **10**, 1-61 (1955).
[4] F. Hartogs: Über das Problem der Wohlordnung. Math. Annalen, **76**, 436-443 (1914).
[5] W. Sierpinski: Leçons sur les nombres transfinis. Paris (1950).
[6] A. Tarski: Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix. Fund. Math., **5**, 147-154 (1924).