124. *Sur certaines équations fonctionnelles-différentielles-aux différences à plusieurs variables indépendentes*[†),1)]

Par M. N. Oğuztöreli*) et D. Mangeron**)

(Comm. by Kinjirô Kunugi, M. J. A., June 12, 1970)

1. La mise en oeuvre systématique par V. Volterra du *principe de passage du discontinu au continu*, cristallisé dans son ouvrage, helas! non achevé, planifié à paraître en trois volumes, à savoir: I. *Généralités sur les fonctionnelles. Théorie des équations intégrales* [1]; II. *Composition. Equations intégro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles. Application des fonctionnelles à l'extension de la théorie des fonctions analytiques* et III. *Compléments contenant en particulier une exposition sur les théories modernes du Calcul des variations et les fonctionnelles analytiques et les applications à la Mécanique, à la Physique mathématique, à la Biologie, à la Statistique et à l'Economie politique*, parallèlement à l'essor de lóeuvre collective monumentale du Bourbaki [2], où, à côté de l'exposition des théories mathématiques du point de vue de leurs structures, c'est à dire à côté de l'*isolation* des structures on y trouve de très prolifiques *actions de mêler*, a contribué dans les dernières décades à l'élaboration des mises au point dédiées *séparément* aux équations intégrales [3]–[4], aux équations aux arguments retardés [5]–[7], aux équations aux différences finies [8]–[9], aux équations aux récurrences [10], aux équations fonctionnelles [11]–[12] et d'autres encore, et, d'autre côté, à la parution d'un nombre assez grand de travaux où l'on étudie les propriétés appartenant *simultanément* aux différentes sousdivisions de l'ensemble des équations fonctionelles entendues au sens assez large de ce mot.[2] On en trouve aujourd'hui des travaux consacrés aux équations fonctionnelles-différentielles [13]–[14], aux équations différen-tielles aux

†) A MM. les Professeurs Masuo Hukuhara et Mitio Nagumo à l'occasion de leur 65-ème anniversaire.

1) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada by Grant NRC-A4345 through the University of Alberta.

*) Dept. of Mathematics, University of Alberta, Edmonton 7, Alberta, Canada.

**) Inst. Polytechnique de Jassy, Roumanie et Dept. de Math., Université d'Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

2) Cet encadrement structurel des différentes catégories d'équations dans un seul ensemble a été inaugurée depuis 1906 par le "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" et a subsisté pendant la période de l'accumulation des résultats dans ces domaines.

différences [15]-[16], aux équations intégro-différentielles, linéaires ou non, aux opérateurs polyvibrants, polyharmoniques et polycaloriques, aux arguments retardés [17]–[24] et d'autres encore.

Dans ce qui suit les auteurs déterminent, d'après ce qu'ils savent pour la première fois, les solutions de certaines équations fonctionnelles-différentielles-aux différences à plusieurs variables indépendentes.

2. Soit l'équation fonctionnelle-aux différences

$$F(x+\xi, y+\eta; \alpha)=F(x, y; \alpha-1)+F(\xi, \eta; \alpha-1)+Q(\alpha) \tag{2.1}$$

et les équations fonctionnelles-différencielles-aux différences

$$F(x+\xi, y+\eta; \alpha)= \frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial y^n} F(x, y; \alpha-1)+\frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^n \partial \eta^n} F(\xi, \eta; \alpha-1)+Q(\alpha), \tag{2.2}$$

et

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^m \partial y^n} F(x+\xi, y+\eta; \alpha)=F(x, y; \alpha-1)+F(\xi, \eta; \alpha-1)+Q(\alpha), \tag{2.3}$$

où $Q(\alpha)$ est une fonction sommable donnée de α et m et n sont des nombres entiers positifs. Tout en soulignant le fait que les équations ci-dessus embrassent une classe assez vaste d'équations fonctionnelles-aux différences et d'équations fonctionnelles-différentielles-aux différences et en tenant compte que chaque solution $F(x, y; \alpha)$ de l'équation (2.1), intégrable, pour tous α, par rapport a x et y est aussi bien différentiable par rapport à ces mêmes variables et que les solutions des équations (2.2) et (2.3) admettent des dérivées d'ordre quelconque par rapport à x et y, prenons le départ de l'équation (2.1). Posons

$$F(0, 0; \alpha)=\zeta(\alpha). \tag{2.4}$$

Puisque l'équation (2.1) devient, pour $x=y=\xi=\eta=0$, l'équation aux différences finies

$$\zeta(\alpha)-2\zeta(\alpha-1)=Q(\alpha), \tag{2.5}$$

on obtient pour la fonction $\zeta(\alpha)$ l'expression

$$\delta(\alpha)=\zeta_0(\alpha)+\omega_0(\alpha)2^{\alpha}, \tag{2.6}$$

où $\omega_0(\alpha)$ est une fonction périodique arbitraire de α, de période 1, et $\zeta_0(\alpha)$ est une solution particulière de l'équation (2.5).

En appliquant à l'équation (2.1) l'opérateur différentiel polyvibrant $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$, ou ce que est le même l'opérateur de dérivée totale au sens de M. Picone [25]–[26], on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x+\xi, y+\eta; \alpha)=\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y; \alpha-1) \tag{2.7}$$

et on en conclut que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y; \alpha)=C(\alpha), \tag{2.8}$$

où $C(\alpha)$ est une fonction qui ne depend que de α. En intégrant l'equation (2.8) par rapport aux variables x et y et en substituant le résultat acquis dans (2.1) pour en déterminer les inconnues, on peut enoncer le

Théorème 1. *L'équation fonctionnelle-aux différences* (2.1) *a pour solution une fonction $F(x,y;\alpha)$ qui peut s'écrire sous la forme*

$$F(x,y;\alpha)=\zeta_0(\alpha)+\omega_0(\alpha)2^\alpha+\omega_1(\alpha)x+\omega_2(\alpha)y, \tag{2.9}$$

où $\omega_k(\alpha)(k=0,1,2)$ sont des fonctions périodiques de α, de période 1, *et $\zeta_0(\alpha)$ est une solution particulière de l'équation aux différences finies* (2.5).

3. Les considérations et les raisonnements similaires nous conduisent à la détermination des solutions-cette fois-ci uniques- des équations (2.2) et (2.3). Elles cont données respectivement par

$$F(x,y;\alpha)=Q(\alpha) \tag{3.1}$$

et

$$F(x,y:\alpha)=-\frac{1}{2}Q(\alpha). \tag{3.2}$$

Remarque. Tout en soulignant le fait que l'équation fonctionnelle-aux différences ou bien les équations fonctionnelles-différentielles-aux différences à un nombre quelconque de variables indépendentes[3] $x_1, x_2, \cdots, x_n$, aux opérateurs polyvibrants

$$F(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n;\alpha) \\ =F(x_1,\cdots,x_n;\alpha-1)+F(\xi_1,\cdots,\xi_n;\alpha-1)+Q(\alpha), \tag{3.3}$$

$$F(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n;\alpha) \\ =\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(x_1,\cdots,x_n;\alpha-1) \\ +\frac{\partial^n}{\partial\xi_1\cdots\partial\xi_n}F(\xi_1,\cdots,\xi_n;\alpha-1)+Q(\alpha) \tag{3.4}$$

et

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F(x_1+\xi_1,\cdots,x_n+\xi_n;\alpha) \\ =F(x_1,\cdots,x_n;\alpha-1)+F(\xi_1,\cdots,\xi_n;\alpha-1)+Q(\alpha) \tag{3.5}$$

peuvent être analysées d'unemanière analogue, mentionnons ici que dans l'une de nos prochaines Notes nous exposerons nombre de résultats concernant les équations fonctionnelles-différentielles-aux différences dont les premiers membres se déduisent des numérateurs des expressions qui conduisent à la limite aux dérivées polivibrantes ou bien des expressions des moyennes. Telles sont, par ex., les expressions de départ:

(3.6)

$$F(x_1+\xi_1,x_2+\xi_2)+F(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)\mp F(x_1+\xi_1,x_2-\xi_2)\mp F(x_1-\xi_1,x_2+\xi_2),$$

ou bien

3) Il est presque superflu de souligner que dans certains problèmes on aura à faire distinction des cas où n est un nombre naturel pair ou bien impair.

$$
\begin{aligned}
(3.7) \qquad & F(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, x_3+\xi_3)+F(x_1-\xi_1, x_2+\xi_2, x_3+\xi_3) \\
& +F(x_1-\xi_1\cdot x_2-\xi_2, x_3-\xi_3)+F(x_1+\xi_1, x_2-\xi_2, x_3-\xi_3) \\
& \mp F(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, x_3-\xi_3)\mp F(x_1-\xi_1, x_2+\xi_2, x_3-\xi_3) \\
& \mp F(x_1+\xi_1, x_2-\xi_2, x_3+\xi_3)\mp F(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3+\xi_3)
\end{aligned}
$$

qui correspondent aux cas de deux et trois variables indépendentes respectivement.

Références

[1] V. Volterra et J. Peres: Théorie générale des fonctionnelles, Tome I. Gauthier-Villars, Paris (1936).

[2] J. A. Dieudonné: The Work of Nicholas Bourbani. Amer. Math. Monthly, **77**(2), 134–145 (1970).

[3] M. Hukuhara: Equations intégrales (en Japonais). Kyoritsu Shuppan (1955), Tokyo. Voir aussi la série de ses articles insérés en 1958 et 1959 dans la revue "Funkcialaj Ekvacioj" concernant la théorie de l'endomorphisme.

[4] F. Tricomi: Integral Equations (traduit de l'Italien). Interscience Publ., N. Y. (1957).

[5] A. D. Myshkis: Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument (Traduit de Russe). Herschel, Wurzburg, Physica-Verlag (1955).

[6] L. E. El'sgol'ts: Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument (Traduit de Russe). Holden Day, San Francisco (1966).

[7] M. N. Oğuztöreli: The Time-Lag Systems. Academic Press, New York, London (1966).

[8] L. E. Milne-Thomson: The Calculus of Finite-Differences. MacMillan, London (1951).

[9] A. O. Gelfond: Differenzenrechnung (Traduit de Russe). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin (1958).

[10] P. Montel: Leçons sur les récurrences et leurs applications. Gauthier-Villars, Paris (1957).

[11] J. Aczel: On Applications and Theory of Functional Equations. Academic Press, New York, London (1969).

[12] M. Kuczma: Functional Equations in a Single Variable. PWN. PAN, Varsovie (1969).

[13] S. Sugiyama: Stability problems on differential and functional-differential equations. Proc. Japan Acad., **45**(7), 526–529 (1969).

[14] S. N. Bernstein: Collected Works (traduit de Russe). U. S. Atomic Energy Comm. Oak Ridge. Tenn (1952).

[15] E. Pinney: Differential-Difference Equations. University of California Press, Berkeley, Los Angeles (1958).

[16] R. Bellman et K. L. Cooke: Differential-Difference Equations. Academic Press, New York, London (1963).

[17] D. Mangeron: Connections between solutions of boundary value problems of different types. Bull. Polytechn. Inst. Jassy, **1**, 295–300 (1946); **3**(7), N.S., 1–2, 39–45 (1957).

[18] M. Nicolescu: Equation itérée de la chaleur. Studii si Cercetari Mat., **5** (3–4), 327–332 (1954).

[19] M. Itô: Sur les fonctions Polyharmoniques et le problème de Riquier. Nagoya Math. J., **37**, 81–90 (1970).

[20] D. Mangeron: Problèmes concernant les équations polyvibrants. Comptes

rendus Acad. Sci., Paris, A **226**, 976-978, 1050-1053 (1968).

[21] D. Mangeron and L. E. Krivosheine: Sistemi policalorici con rimanenza ed argomento ritardato. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **35**, 341-364 (1963).

[22] D. Mangeron and M. N. Oğuztöreli: Estensione dei metodi di maggiorazione di Picone alle soluzioni di sistemi di equazioni polivibranti. Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. Fis., Mat. e Nat., s. 8, **44**(5), 625-632 (1968).

[23] M. N. Oğuztöreli: Un problema misto concernente un' equazione integro-differenziale di tipo parabolico con argomento ritardato. Rend. Mat. Rome, 6-e s., **2**, 245-294 (1969).

[24] M. Nagumo: Eine Art der Randwertaufgabe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen ("Hukuhara's Problem"). Proc. Phys. -Math. Soc., Japan, 3-e ser., **25**, 221-226, 384-390 (1943).

[25] M. Picone: Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della Fisica Matematica. Ann. Sci. Univ. Jassy, I-e Sect., **26**(1), 183-232 (1940).

[26] D. Mangeron and M. N. Oğuztöreli: Fonctions de Bessel et polynômes de Legendre relatives aux équations polyvibrantes généralisées. Comptes rendus Acad. Sci., Paris, **270**, 37-40 (1970).