112. *Réalisation des fonctions definies dans un ensemble fini à l'aide des organes élémentaires d'entrée-sortie*

Par Akihiro NOZAKI

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 12, 1970)

Résumé. Un *organe élémentaire* est un organe d'entrée-sortie qui effectue, en un certain temps fini, une opération définie dans un ensemble fini

$$(k)=\{0,1,2,\cdots,k-1\}.$$

On donne les condition nénessaires et suffisantes pour qu'un ensemble donné d'organes élémentaires puisse *réaliser* toutes les fonctions définies dans (k).

Le problème se réduit à celui de génération de fonctions à partir d'un ensemble de fonctions (ou d'une suite d'ensembles de fonctions) à l'aide de l'opération de composition restreinte.

1. Introduction. On considère des organes d'entrée sortie munis d'un fil de sortie et d'un ou de plusieurs fils d'entrée.

On suppose les hypothèses suivantes:

1) L'entrée et la sortie sont des séries de "signaux".

2) Il y a k signaux distincts notés par

$$0,1,2,\cdots,k-1$$

On désigne l'ensemble de ces signaux par (k): $(k)=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$

3) L'opération d'un organe M muni d'un fil de sortie v et de n fils d'entrée $u_1,\cdots,u_n$ est représentée par une fonction f à n variables definie dans (k) et par un entier non negatif d de la facon suivante:

$$v(t+d)=f(u_1(t),\cdots,u_n(t))$$

où $v(t)$, $u_i(t)$ représentent les singaux circulant au moment t dans le fil v et dans le fil u_i, respectivement.

L'organe M satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3) s'appelle *organe* élémentaire. On dit que *l'organe élémentaire M réalise en temps d'opération d la fonction*

$$f:(k)^n\rightarrow(k)$$

On peut considérer un élément logique électronique comme organe élémentaire.

On désigne par $\Omega(k)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies dans (k). On peut alors associer à chaque ensemble A d'organes élémentaires une suite de parties de $\Omega(k)$:

$$F=(F_0,F_1,F_2,\cdots)$$

qui sont définies de la façon suivante:

F_n *est l'ensemble de fonctions réalisables par certains organes de* A *en temps d'opération* n.

Soit $\tilde{A}$ l'ensemble d'organes élémentaires qu'on peut composer à l'aide des organes de A. Dans ce qui suit on considèrera la relation entre l'ensemble A et l'ensemble de fonctions réalisables par des organes de $\tilde{A}$.

2. Opération de composition A. Suite ~-complète. On designe par $M(X, Y)$ l'ensemble des fonctions definies dans X dont les valeurs appartiennent à Y.

Définition 1. $(k)=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$

$$\Omega_n = M((k)^n, (k))$$

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

Définition 2. Soient $g_1, \cdots, g_m$ des fonctions de Ω_n. Soit f une fonction de Ω_m.

On designe par

$$f(g_1 \times \cdots \times g_m)$$

une fonction à n variables définie ainsi:

$$f(g_1 \times \cdots \times g_m)(x_1, \cdots, x_n) = f(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

Définition 3.

Soient A, B des parties de Ω.

1) $A \circ B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(g_1 \times \cdots \times g_m); f \in A \cap \Omega_m, g_i \in B \cap \Omega_n\}$

2) $A^1 = A$

3) $A^n = A^{n-1} \circ A$

Lemme 1.

1) Si $B \subseteq \Omega_n$, alors $A \circ B \subseteq \Omega_n$

2) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$

3) $A \subseteq A', B \subseteq B' \Rightarrow A \circ A' \subseteq B \circ B'$

Définition 4. 1) $\mathfrak{p}_n = \{P_i^n ; 1 \leq i \leq n\}$

où P_i^n est une *projection* de Ω_n:

$$P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$$

2) $\mathfrak{p} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$

Définition 5. Soient F, F' des suites de parties de Ω:

$$F = (F_0, F_1, F_2, \cdots)$$

$$F' = (F'_0, F'_1, F'_2, \cdots)$$

1) $F \subseteq F' \Longleftrightarrow F_i \subseteq F'_i$ pour tout $i \geqq 0$

2) On designe par $\tilde{F}$ la suite minimum satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $F \subseteq \tilde{F}$

b) $\mathfrak{p} \subseteq \tilde{F}_0$

c) $\tilde{F}_p \circ \tilde{F}_q \subseteq \tilde{F}_{p+q}$ pour tous $p, q \geqq 0$.

3) La suite F est dite $\sim$-*complete* si

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \tilde{F}_i = \Omega$$

4) La suite F est dite $\sim$-maximale si F n'est pas $\sim$-complète et si

$$F \subseteq F',\, F \neq F'$$

entraine que F' est $\sim$-complète.

Remarque. Dans le cas où $k=2$, W. B. Kudrjavtiev a caractérisé toutes les suites $\sim$-maximales (voir [6]).

B. Ensemble complet. Soit H une partie de $\Omega(k)$. On désigne par $\bar{H}$ l'ensemble des fonctions qui s'obtiennent de H par les opérations de composition et de remplacement de variables.

H est dit *complet* si $\bar{H} = \Omega(k)$

H est dit *maximal* si $\bar{H} \neq \Omega(k)$

et si $G \supsetneqq H$ entraine $\bar{G} = \Omega(k)$.

Il est évident que l'ensemble H est complet si et seulement si la suite suivante est $\sim$-complète.

$$(H, \phi, \phi, \phi, \cdots)$$

Lemme 2. *L'ensemble H est complet si et seulement si H n'est contenu par aucun ensemble maximal.*

Theoreme (Post [3]). *Il existe exactement cinq ensembles maximaux dans $\Omega(2)$.*

Theoreme (Yablonski [4]). *Il existe exactement dix-huit ensembles maximaux dans $\Omega(3)$.*

Remarque. Rosenberg [5] a caractérisé tous les ensembles maximaux pour $k \geqq 3$.

C. Ensemble $\sim$-maximal.

Définition 6. Soit H une partie de $\Omega(k)$

1) $\tilde{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H')^n$ où $H' = H \circ \mathfrak{p}$

2) H est dit $\sim$-*complet* si $\tilde{H} = \Omega(k)$

3) H est $\sim$-*maximal* si

3.1) $\tilde{H} \neq \Omega(k)$

et si

3.2) $G \supseteq H,\ G \neq H \Rightarrow \tilde{G} = \Omega(k)$

Remarque. Désignons par $S(x, y)$ la fonction de Sheffer définie dans $(2) = \{0, 1\}$: $S(x, y) = 1 - x \cdot y$

L'ensemble $H = \{S(x, y)\}$ est alors complet tandis qu'il n'est pas $\sim$-complet (von Neumann [2]). On peut vérifier pour tout k qu'il n'y a pas d'ensemble $\sim$-complet contenant une seule fonction.

Lemme 3.

1) $\tilde{H} \subseteq \bar{H}$

2) *Si H contient l'identité $I(x)=x$, $\tilde{H}=\bar{H}$.*

3) *Tout ensemble maximal contient l'identité $I(x)$.*

Corollaire.

1) *H $\sim$-complet$\Rightarrow H$ complet*

2) *H maximal$\Rightarrow H$ $\sim$-maximal*

D'après Kudrjavtiev [6], *il y a exactement huit ensembles $\sim$-maximaux dans $\Omega(2)$.*

Un résultat semblable est obtenu par Ibuki [7]: *il emploie une opération, mettons $H^{\dagger}$, plus générale que la nôtre et il montre qu'il existe exactement sept ensembles $\dagger$-maximaux.*

3. Resultats.

Définition 7. Soit a, b des éléments distincts de (k).

On note par $K(a, b)$ l'ensemble de toutes les fonctions telles que

$$f(a, \cdots, a)=f(b, \cdots, b)$$

Théorème 1. *Soit H un sous-ensemble de $\Omega(k)$*

Pour que H soit $\sim$-complet, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes:

1) *$H \not\subseteq K(a, b)$ quels que soient des éléments distincts a et b.*

2) *$H^n \not\subseteq M$ pour tout ensemble maximal M et tout entier n.*

(*voir la définition* 3, 3)

D'après ce théorème, on peut caractériser les ensembles $\sim$-maximaux. En effet:

Théorème 2. *Il y a exactement trente ensembles $\sim$-maximaux dans $\Omega(3)$.*

Voici le théorème fondamental de ce travail:

Théorème 3. *Soit $F=(F_i)$ une suite de parties de Ω telle que $\bar{F}_0 \neq \Omega$.*

La suite F est $\sim$-complète si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes:

1) $(\exists N>0)(\forall a, b\,;\, a\neq b)\tilde{F}_N \not\subseteq K(a, b)$

2) Pour tout ensemble maximal M et tout entier positif q, il existe un entier non negatif p tel que

$$\tilde{F}_{pq} \not\subseteq M$$

Le théorème 2 s'obtient immédiatement du théorème 3.

Le démonstrations des théorèmes seront publiées plus tard ([8]).

L'auteur voudrait exprimer sa gratitude à Monsieur le Professeur J. V. Yablonski et au Professeur C. Benzaken qui ont eu la bonté de lui fournir les commentaires importants sur ce travail, et aussi au Professeur B. Vauquois grâce auquel il a pu faire les recherches dans de bonnes conditions.

Références

[1] Loomis Jr., H. H.: Completeness of Sets of Delayed-Logic Devices, IEEE Transaction EC-14 No. 2, pp. 157-172 (1965).
[2] Von Neumann, J.: Probabilistic Logics and the Synthesis of Reliable Organisms from unreliable components. Automata Studies, Princeton University Press, pp. 43-98 (1956).
[3] Post, E. L.: The two-valued iterative systems of mathematical logics Princeton University Press (1941).
[4] Yablonski, J. V.: Funktsionalnie Postroenija w k-znatchnoi Logike. Trudi Matematiceskogo Instituta Imeni Steklova, **51**, 5-142 (1958).
[5] Rosenberg, I.: Structure de la classe des fonctions définies dans un ensemble fini quelconque. Comptes-rendus, Academie Scientifique. T 260 (1965).
[6] Kudrjavtiev, V. B.: Teorema Polnoti dlja odnogo klassa awtomatow bez obratnox swjazei. Dokladi Akademii Nauk, **132**, 272-274 (1960).
[7] Ibuki, K.: Studies on the universal logic circuits (in Japanese). Dendenköska Denkitsushin-Kenkyusho, Research Report 3747 (1968).
[8] Nozaki, A.: Functional Studies of Automata. I, II (to appear).