87. *Représentations unitaires du groupe modulaire*

Par Masahiko SAITO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 2, 1972)

On construit une infinité de séries à un paramètre continu de représentations unitaires irréductibles de dimension infinie du groupe modulaire $G=SL(2,\boldsymbol{Z})$. L'exposé détaillé avec démonstrations paraîtra ultérieurement.

1. Soit $\varDelta$ zéro ou un nombre rationnel positif et non carré. Ecrivons $\varDelta=m/n$ où m et n sont des entiers relativement premiers, $m\geqslant 0$, $n>0$. Soit $H(\varDelta)$ le sous-groupe de G formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & mb \\ nb & a \end{pmatrix}$, $a^2-mnb^2=1$. $H(\varDelta)$ est un groupe infini commutatif, isomorphe à $\boldsymbol{Z}\times\{\pm 1\}$. Choisissons un caractère χ ($=$représentation unitaire unidimensionnelle) de $H(\varDelta)$, et notons par $U(\varDelta,\chi)$ la représentation unitaire de G induite de χ.

Appelons $\varDelta$ de $(-)$-catégorie si l'équation $x^2-mny^2=-1$ admet une solution entière, et de $(+)$-catégorie sinon (0 est de $(+)$-catégorie).

Théorème 1. a) *Si $\varDelta$ est de $(+)$-catégorie, $U(\varDelta,\chi)$ est irréductible.*

b) *Si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie et si $\chi^2\neq 1$, $U(\varDelta,\chi)$ est irréductible.*

c) *Si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie et si $\chi^2=1$, $U(\varDelta,\chi)$ se décompose en somme directe de deux représentations irréductibles.*

2. Prenons une section Θ sur $H\backslash G$ dans G: tout élément $g\in G$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $\rho(g)\cdot\theta(g)$, $\rho(g)\in H$, $\theta(g)\in\Theta$.

Soient $F=F(\varDelta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\varDelta \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\varDelta)$ l'ensemble des matrices ${}^tgFg$, $g\in G$. Pour X dans $\boldsymbol{X}$, $-X$ appartient à $\boldsymbol{X}$ si et seulement si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie. $H(\varDelta)$ est la totalité de $g\in G$ tel que ${}^tgFg=F$. Par conséquent, Θ et $\boldsymbol{X}$ sont dans une correspondance biunivoque $\theta\leftrightarrow{}^t\theta F\theta$. Pour $X\in\boldsymbol{X}$, écrivons $\theta(X)$ le seul élément θ dans Θ tel que ${}^t\theta F\theta=X$.

La représentation $U(\varDelta,\chi)$ se réalise dans $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(\varDelta)=l^2(\boldsymbol{X})$: pour $\varphi\in\mathfrak{H}$, $g\in G$ et $X\in\boldsymbol{X}$,

$$U(\varDelta,\chi\,;g)\varphi(X)=\chi(\rho(\theta(X)\cdot g))\varphi({}^tgXg).$$

3. Soit $H^-(\varDelta)$ l'ensemble des matrices dans G de la forme $\begin{pmatrix} a & -mb \\ nb & -a \end{pmatrix}$, $a^2-mnb^2=-1$, et posons $\tilde{H}(\varDelta)=H(\varDelta)\cup H^-(\varDelta)$. Si $\varDelta$ est de $(+)$-catégorie, $\tilde{H}(\varDelta)=H(\varDelta)$. Si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie, $\tilde{H}(\varDelta)$ est un sous-groupe de G dans lequel $H(\varDelta)$ est d'indice 2. $H^-(\varDelta)$ est la totalité de $g \in G$ tel que ${}^t gFg = -F$. Donc, si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie, $\Theta \cap H^-(\varDelta)$ est formé d'un seul élément k_0. Supposons pour la simplicité que $1 \in \Theta$ et que pour tout $\theta \in \Theta$, un des $\pm k_0\theta$ appartient à Θ. Posons $\omega(X) = 1$ si $k_0 \cdot \theta(X) \in \Theta$, et $\omega(X) = -1$ sinon.

4. Supposons toujours $\varDelta$ de $(-)$-catégorie. Il y a quatre caractères χ de $H(\varDelta)$ tels que $\chi^2 = 1$. Ils sont déterminés par la table cidessous, où h_1 est un élément de $H(\varDelta)$ tel que tout élément de $H(\varDelta)$ s'écrit sous la forme $\pm h_1^n$ ($n \in \boldsymbol{Z}$):

	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
$\chi(-1)$	1	1	-1	-1
$\chi(h_1)$	1	-1	1	-1

Pour $i = 1, 2$, l'espace $\mathfrak{H}^+$ (resp. $\mathfrak{H}^-$) des fonctions paires (resp. impaires) dans $\mathfrak{H}$ est stable par $U(\varDelta, \chi_i)$, où est définie la représentation irréductible $U^+(\varDelta, \chi_i)$ (resp. $U^-(\varDelta, \chi_i)$).

Pour $i = 3, 4$, l'espace $\mathfrak{H}^\vee$ (resp. $\mathfrak{H}^\wedge$) des fonctions φ dans $\mathfrak{H}$ telles que $\varphi(-X) = \sqrt{-1}\omega(X)\varphi(X)$ (resp. $\varphi(-X) = -\sqrt{-1}\omega(X)\varphi(X)$) est stable par $U(\varDelta, \chi_i)$, où est définie la représentation irréductible $U^+(\varDelta, \chi_i)$ (resp. $U^-(\varDelta, \chi_i)$).

5. **Théorème 2.** a) *Si $\varDelta$ est de $(+)$-catégorie et si $\chi \neq \chi'$, $U(\varDelta, \chi)$ et $U(\varDelta, \chi')$ ne sont pas équivalentes.*

b) *Si $\varDelta$ est de $(-)$-catégorie, $U(\varDelta, \chi)$ et $U(\varDelta, \chi')$ sont équivalentes si et seulement si $\chi' = \chi$ ou $\chi' = \chi^{-1}$.*

c) *$U^\pm(\varDelta, \chi_i)$ n'est équivalente à aucune $U(\varDelta, \chi)$. Les huit $U^\pm(\varDelta, \chi_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sont inéquivalentes l'une à l'autre.*

6. Soit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $sH(\varDelta)s^{-1} = H(\varDelta^{-1})$ pour $\varDelta \neq 0$. Pour un caractère χ de $H(\varDelta)$, soit χ' le caractère de $H(\varDelta^{-1})$ défini par $\chi'(h') = \chi(s^{-1}h's)$ $(h' \in H(\varDelta^{-1}))$. On a alors $U(\varDelta, \chi) \sim U(\varDelta^{-1}, \chi')$.

Il semble difficile de déterminer l'équivalence possible entre $U(\varDelta, \chi)$ et $U(\varDelta', \chi')$ pour $\varDelta \neq \varDelta'$. On a toutefois le théorème suivant.

Théorème 3. *Si $\varDelta$ est entier et si $\varDelta < \varDelta'$, $U(\varDelta, \chi)$ et $U(\varDelta', \chi')$ sont inéquivalentes pour tout χ, χ'. En particulier, si $\varDelta, \varDelta'$ sont des entiers différents, $U(\varDelta, \chi)$ et $U(\varDelta', \chi')$ sont inéquivalentes.*

7. Pour un sous-ensemble fini $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{X}$ et pour φ, ψ dans $l^2(X)$, posons $\langle \varphi, \psi \rangle_{\boldsymbol{Y}} = \sum_{Y \in \boldsymbol{Y}} \varphi(Y)\overline{\psi(Y)}$. Considérons une représentation $U^\circ(\varDelta, \chi)$ (le rond $^\circ$ en haut représente vide, $+$ ou $-$).

Théorème 4. *Pour tout $g \neq \pm 1$ dans G, il existe un seul nombre $T^\circ(g) = T^\circ(\varDelta, \chi; g)$ jouissant de la propriété suivante: pour toute base hilbertienne $\{\varphi_n; n = 1, 2, \cdots\}$ de $\mathfrak{H}^\circ$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $\boldsymbol{Y}_0$ dans $\boldsymbol{X}$ tel qu'on ait l'inégalité*

$$|T^\circ(g) - \sum_{n=1}^{\infty} < U^\circ(g)\varphi_n, \varphi_n >_{\boldsymbol{Y}}| \leqslant \varepsilon$$

pour tout Y *fini contenant* Y_0.

La some dans l'inégalité converge absolument. On pourrait appeler $T^{\circ}(g)$ la *trace principale* de l'opérateur $U^{\circ}(g)$.

Les traces principales possèdent les propriétés suivantes:

a) Si g_1 et g_2 sont conjugués dans G, on a $T^{\circ}(\Delta, \chi; g_1) = T^{\circ}(\Delta, \chi; g_2)$ pour tout Δ, χ.

b) Si $U^{\circ}(\Delta, \chi)$ et $U^{\circ}(\Delta', \chi')$ sont équivalentes, on a $T^{\circ}(\Delta, \chi; g) = T^{\circ}(\Delta', \chi'; g)$ pour tout $g \neq \pm 1$ dans G.

Théorème 5. *Si* g *n'est conjugué à aucun élément de* $\tilde{H}(\Delta)$, *on a* $T^{\circ}(\Delta, \chi; g) = 0$ *pour tout* χ. *Si* $g \neq \pm 1$ *est conjugué à un élément de* $\tilde{H}(\Delta)$, $T^{\circ}(\Delta, \chi; g)$ *est donnée par la table qui suit.*

		$g \sim h \in H(\Delta)$	$g \sim k \in H^{-}(\Delta)$
Δ: $(+)$-catégorie.	$T(\Delta, \chi; g)$	$\chi(h)$	$*$
Δ: $(-)$-catégorie.	$T(\Delta, \chi; g)$	$\chi(h) + \overline{\chi(h)}$	0
	$T^{\pm}(\Delta, \chi_1; g)$	1	± 2
	$T^{\pm}(\Delta, \chi_2; g)$	$\chi_2(h)$	0
	$T^{\pm}(\Delta, \chi_3; g)$	$\chi_3(h)$	$\pm 2\sqrt{-1}\sigma(k)$
	$T^{\pm}(\Delta, \chi_4; g)$	$\chi_4(h)$	0

Ici dans la table, $\sigma(k) = \pm 1$ suivant que $k = \pm h_1^n k_0$ $(n \in \boldsymbol{Z})$.