102. *Zur konformen Flächentheorie mit Krümmungskugeln als Elementen, III.*[1)]

Von Tsurusaburo TAKASU.

(Rec. Sept. 9, 1929. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1929.)

8. Vorteile des letzten Fundamentalsatzes.

Wir wollen nun die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$(59)\qquad (\varkappa_h\varkappa_k)=\check{\mathfrak{g}}_{hk},\quad (\varkappa'_h\varkappa'_k)=\check{\mathfrak{g}}'_{hk},\quad -(\varkappa_h\hat{\mathfrak{x}}_k)=\check{D}_{hk},\quad -(\varkappa'_h\hat{\mathfrak{x}}_k)=\check{D}'_{hk},$$

$$(60)\qquad (\eta_h\hat{\mathfrak{x}}_k)=\hat{D}_{hk},\quad (\hat{\mathfrak{x}}_h\hat{\mathfrak{x}}_k)=\hat{G}_{hk},$$

wobei $\varkappa$, $\varkappa'$: die beiden Krümmungskugeln,

$\eta=\varkappa+\varkappa'$: die Zentralkugel,

$\hat{\mathfrak{x}}=\varkappa-\varkappa'$: der Flächenpunkt

sind. Dann, da

$$\varkappa=\eta+\hat{\mathfrak{x}},\quad \varkappa'=\eta-\hat{\mathfrak{x}}$$

ist, gelten[2)]:

$$(61)\qquad \boxed{\check{D}_{hk}=\hat{D}_{hk}-\hat{G}_{hk},\quad \check{D}'_{hk}=\hat{D}_{hk}+\hat{G}_{hk}.}$$

Nun habe ich bewiesen[3)]:

$$(62)\qquad \boxed{\hat{D}_{hk}=\frac{1}{4}\{\check{\mathfrak{g}}'_{hk}-\check{\mathfrak{g}}_{hk}\},\quad \hat{G}_{hk}=\frac{1}{4}\{\check{\mathfrak{g}}'_{hk}+\check{\mathfrak{g}}_{hk}\}=(\eta_h\eta_k).}$$

---

1) Betreffs der Teile I, II, siehe diese Proc., **4** (1928).

2) Die Formel $\check{D}_{hk}=\hat{D}'_{hk}-\hat{G}_{hk}$ ergibt einen Beweis für die durch Herrn Prof. Kubota gemachten Bemerkung über die Äquivalenz der beiden Angaben:

$$\hat{G}_{hk}du^h du^k,\quad \hat{D}_{hk}du^h du^k \quad \text{(G. Thomsen)}$$

$$\hat{G}_{hk}du^h du^k,\quad \check{D}_{hk}du^h du^k \quad \text{(T. Takasu)}$$

ohne weiteres. Siehe T. Kubota, Zur Geometrie der Krümmungskugelkongruenzen, Proc., **4** (1928), S. 584.

3) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, II. Tohoku Sc. Rep., **17** (1928), S. 541. Die Formeln (62) (Takasu, 1925) stammen bis auf die Ausdrücke in pentasphärischen Koordinaten aus Herrn K. Ogura. (Siehe die dortige Fussnote.)

Aus (61) und (62) ergibt sich[1]:

$$(63) \qquad \boxed{2\check{D}_{hk} = -\check{\mathfrak{g}}_{hk}, \quad 2\check{D}'_{hk} = \check{\mathfrak{g}}'_{hk}.}$$

Also *hat der Fundamentalsatz vom Art. 7 die folgenden Vorteile:*

(i) *Nur eine Mantelfläche kommt in Betracht;*

(ii) *die quadratische Form* $\hat{G}_{hk}du^h du^k$ *stellt das Quadrat des durch die Zentralkugel* η *beschriebenen Winkelelementes dar;*

(iii) *die quadratische Form* $-2\check{D}_{hk}du^h du^k$ *stellt das Quadrat des durch die Krümmungskugel* $\varkappa$ *beschriebenen Winkelelementes dar.*

9. Endgültiger Fundamentalsatz der konformen Flächentheorie.

Es ist klar, dass die folgenden drei Arten von Angaben äquivalent sind:

(i) $\hat{D}_{hk}, \quad \hat{G}_{hk} \equiv \hat{\mathfrak{g}}_{hk}$ (G. Thomsen),

(ii) $2\check{D}_{hk} \equiv -\check{\mathfrak{g}}_{hk}, \quad \hat{G}_{hk}$ (T. Takasu, Art. 8 dieser Note),

(iii) $2\check{D}_{hk} \equiv -\check{\mathfrak{g}}_{hk}, \quad 2\check{D}'_{hk} \equiv -\check{\mathfrak{g}}'_{hk}$ („).

Mit Benutzung von den Bezeichnungen der Artt. 1–7 auf Grund von den Beziehungen (62), (63) können wir jetzt schliessen:

Endgültiger Fundamentalsatz der konformen Flächentheorie: *Sind zwei lineare Formen* $d\varphi$ *und* $d\psi$ *und also auch die zwei quadratischen Formen*

$$(63) \quad \begin{aligned} d\varphi^2 &= \check{\mathfrak{g}}_{hk}du^h du^k, \quad (\check{\mathfrak{g}} \equiv \check{\mathfrak{g}}_{11}\check{\mathfrak{g}}_{22} - \check{\mathfrak{g}}_{12}^2 \equiv 0), \\ d\psi^2 &= \check{\mathfrak{g}}'_{hk}du^h du^k, \quad (\check{\mathfrak{g}}' \equiv \check{\mathfrak{g}}'_{11}\check{\mathfrak{g}}'_{22} - \check{\mathfrak{g}}'^2_{12} \equiv 0) \end{aligned}$$

so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichung (56) *gelten, so existieren für* (57) *stets Flächen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf konforme Transformationen eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle* (57) *unter* (58) *eine einparametrige Schar wesentlich verschiedener isothermer Flächen, wobei alle Flächen dieselben Grundformen haben. Wenn die zwei quadratischen Formen für die beiden Flächen gebildet sind, so ist für die Kongruenz (unter der konformen Gruppe) der beiden Flächen notwending und hinreichend,*

---

1) Wegen $2\check{D}_{hk} = -\check{\mathfrak{g}}_{hk}$ siehe auch:

T. Kubota, a.a. O;

T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, VII. Jap. Journ. of Math., **5** (1929), S. 320.

T. Takasu, „ , VIII, ibid., **6** (1929), S. 73.

dass die zwei Paare dieser Fundamentalformen, die den Bedingungen (57), (58) *natürlich genügen, Paare miteinander kovariant sind.*[1]

N.B. *Entsprechendes gilt natürlich auch für die Laguerresche Flächentheorie.*

---

1) Wegen der Angabe von $d\varphi$ und $d\psi$ siehe:

(i) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, II, a.a. O., (Mai 1928) S. 541, Formeln (984), (987) und S. 555;

(ii) T. Kubota, Bemerkungen zur Laguerre-Geometrie, Tôhoku Sc. Rep., **15** (1926) samt: W. Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre I, Abh. Hamb., **3** (1924). Das erste war bei der Jahresversammlung in Düsseldorf am 23. Sept. 1926 vorgetragen.

(iii) W. Blaschke—G. Thomsen, Vorlesungen über Differentialgeometrie III (Dez. 1928), S. 319.