4. Über den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe.

Von Kenjiro SHODA.

(Rec. Dec. 25, 1929. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1930.)

Die vorliegende Arbeit schließt sich an den beiden Arbeiten von mir: Ueber die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann. 100; Ueber die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe, die in der Math. Zeitschr. erscheinen wird. Diese Arbeiten werden bzw. mit A. und C. zitiert.

Die Struktur des Automorphismenringes bzw. der Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ wurde in A. durch Benützung der vorderen und hinteren Loewyschen Kompositionsreihen aufklärt. Wenn man nun die sämtlichen charakteristischen Reihen von $\mathfrak{A}$ betrachtet, die ich in C. bestimmt habe, so kann man genau wie bei A. vorgehen und einige interessante Resultaten erhalten.

Der Einfachheit halber machen wir folgende Voraussetzung: Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist eine Potenz einer Primzahl p. Der Typus von $\mathfrak{A}$ ist $(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_m)$, wo $e=e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots\ldots \geqq e_m$. Unter den e_i kommt genau $n_\varkappa$-mal $\varkappa$ vor. Den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe von $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten nun eine $\mathfrak{o}$-charakteristische Reihe (Vgl. C.)

$$\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{A}_t=0.$$

Die Gesamtheit der eigentlichen und uneigentlichen Automorphismen von $\mathfrak{A}$, (d.h. die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{o}$), die $\mathfrak{A}_i$ in Null (d.h. in die aus dem Einheitselement bestehende Gruppe $\mathfrak{A}_t$) überführen, bildet ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{o}_i$ in $\mathfrak{o}$. Wir erhalten also eine Reihe von Idealen in $\mathfrak{o}$:

$$\mathfrak{o}_0=0,\ \mathfrak{o}_1,\ \mathfrak{o}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{o}_t=\mathfrak{o}.$$

Man kann nun den folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Unter den Restklassenringen*

$$\mathfrak{o}_1/\mathfrak{o}_0,\ \mathfrak{o}_2/\mathfrak{o}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{o}_t/\mathfrak{o}_{t-1}$$

kommt ein Ring $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}$ *mit* $p^{n_\alpha(n_{\beta+1}+\ldots\ldots+n_e)}$ *Elementen und ein Ring* $\mathfrak{s}_\alpha$ *mit* $p^{n_\alpha(n_\alpha+\ldots\ldots+n_e)}$ *Elementen vor, wo* $\alpha=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ e$; $\beta<\alpha-1$. $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}$ *bzw.* $\mathfrak{s}_\alpha$*—dieser aufgefasst als eine Abelsche Gruppe gegenüber Addition— hat den Typus* $(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)$. *Es ist* $\mathfrak{r}_{\alpha\beta}^2=0$. $\mathfrak{s}_\alpha$ *besitzt das* *maximale nilpotente Ideal* $\mathfrak{n}_\alpha$ *mit* $\mathfrak{n}_\alpha^2=0$ *und der Restklassenring* $\mathfrak{S}_\alpha/\mathfrak{n}_\alpha$ *ist dem Kongruenzring des Grades* n_α *modulo* p *isomorph.*

Gleichzeitig bewiesen ist der wichtige

Satz 2. *Die Restklassenringe*

$$\mathfrak{o}_1/\mathfrak{o}_0, \quad \mathfrak{o}_2/\mathfrak{o}_1, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{o}_t/\mathfrak{o}_{t-1}$$

sind abgesehen von der Reihenfolge für alle $\mathfrak{o}$*-charakteristische Reihen zueinander isomorph.*

Diese beiden Sätze über den Automorphismenring $\mathfrak{o}$ kann man, wie bei A., durch Strahlbildung in die Theorie der Automorphismengruppe übertragen.

Entsprechend der obigen $\mathfrak{o}$-charakteristischen Reihe ergibt sich nämlich eine Reihe von Normalteilern $\mathfrak{G}_i$ der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G}_0=\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{G}_t=\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{G}_i$ dem Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ und dem Strahl $\{\underline{\mathfrak{o}|\mathfrak{o}_i}\}$ gleich ist, also besteht $\mathfrak{G}_i$ aus den sämtlichen Automorphismen, die $\mathfrak{A}_i$ elementweise festlassen. Aus den obigen beiden Sätzen folgen nun

Satz 1_a. *Unter den Faktorgruppen*

$$\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0, \quad \mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_1, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{G}_t/\mathfrak{G}_{t-1}$$

kommt eine Gruppe $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ *von der Ordnung* $p^{n_\alpha(n_\beta+\ldots\ldots+n_e)}$ *und eine Gruppe* $\mathfrak{S}_\alpha$ *von der Ordnung* $p^{n_\alpha(n_{\alpha+1}+\ldots\ldots+n_e)}(p^{n_\alpha}-1)\ldots\ldots(p^{n_\alpha}-p^{n_\alpha-1})$ *vor, wo* $\alpha=1\ 2, \ldots\ldots, e$; $\beta<\alpha-1$. $\mathfrak{R}_{\alpha\beta}$ *ist eine Abelsche Gruppe vom Typus* (1, 1, ..., 1). $\mathfrak{S}_\alpha$ *besitzt einen Abelschen Normalteiler* $\mathfrak{N}_\alpha$ *vom Typus* (1, 1, ..., 1) *und die Faktorgruppe* $\mathfrak{S}_\alpha/\mathfrak{N}_\alpha$ *ist der Kongruenzgruppe des Grades* n_α *modulo* p *isomorph.*

Ferner ist $\mathfrak{N}_\alpha$ der Durchschnitt aller Sylowgruppen von $\mathfrak{S}_\alpha$, deren Ordnung eine Potenz von p ist.[1]

Satz 2_a. *Die Faktorgruppen*

$$\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0, \quad \mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_1, \quad \ldots\ldots, \quad \mathfrak{G}_t/\mathfrak{G}_{t-1}$$

sind abgesehen von der Reihenfolge für alle $\mathfrak{o}$*-charakteristische Reihen zueinander isomorph.*

Wenn man die sämtlichen $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihen von $\mathfrak{A}$ betrachtet, so gilt dieser merkwürdige Satz 2_a im allgemeinen nicht, was man erkennt, wenn man eine Abelsche Gruppe mit Invarianten $(2^{10}, 2^7, 2^3)$ und zwei $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihen betrachtet, die durch die Reihen von Matrizen

---

1) K. Shoda, Ueber die Einheitengruppe eines endlichen Ringes, Math. Ann. 102. Vgl. die Voranzeige, Proc. **5** (1929), 103.

$$\ldots\ldots, \begin{pmatrix}2^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 2\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^5 & 2^3 & 2\\ 0 & 2^4 & 0\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^6 & 0 & 0\\ 0 & 2^4 & 0\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots, \begin{pmatrix}2^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^3 & 0\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^5 & 0 & 0\\ 0 & 2^4 & 0\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2^6 & 0 & 0\\ 0 & 2^4 & 0\\ 0 & 0 & 2^2\end{pmatrix}, \ldots\ldots$$

definiert werden. (Vgl. C.)

Man kann aber behaupten:

Satz 3. *Bedeutet $\mathfrak{G}_i$ den Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der aus den sämtlichen Automorphismen besteht, die den Glied $\mathfrak{A}_i$ einer $\mathfrak{G}$-charakteristischen Reihe elementweise invariant lassen, so sind die Faktorgruppen*

$$\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0,\quad \mathfrak{G}_2/\mathfrak{G}_1,\quad \ldots\ldots,\quad \mathfrak{G}_t/\mathfrak{G}_{t-1}$$

abgesehen von der Reihenfolge für alle $\mathfrak{G}$-charakteristische Reihen zueinander isomorph, wenn p ungerade ist, oder, wenn $p=2$ und höchstens nur zwei n_α und n_β oder drei benachbarte n_α, $n_{\alpha+1}$, $n_{\alpha+2}$ gleich 1 sind.