11. Zur Algebra der Logik, III.

By Sigekatu KURODA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Rec. and Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1931.)

In Fortsetzung der früheren Note[1] wollen wir hier einen anderen Beweis des Satzes II., 9 mitteilen.

Definition: Ein System von k Elementen $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ heisse *disjunktiv*, wenn

$$A_iA_j = E_0, \qquad i \neq j, \quad 1 \leqq i, \quad j \leqq k$$

sind; *vollständig disjunktiv*, falls überdies auch

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = E_1$$

ist.

Dann ist offenbar ein beliebiges System von disjunktiven Elementen $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ relatif zu $\mathfrak{G}_{p(A)}$ vollständig disjunktiv, wobei $A = \sum_{i=1}^{k} A_i$ ist. Ganz dual kann sich das System von *konjunktiven* bzw. ⟪*vollständig konjunktiven*⟫ (*direkt konjunktiven*) Elementen erklären lassen. Z.B. bildet jedes Element A mit dessen inversen A^{-1} ein vollständig disjunktives und zugleich konjunktives System; insbesondere bildet E_1 mit E_0 und zwar nur mit E_0 ein vollständig disjunktives System. Mit $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$, falls unter denen E_0 nicht vorkommt, sind auch stets die $k+1$ Elemente $A_1, A_2, \ldots\ldots A_k, E_0$ vollständig disjunktiv und umgekehrt.

Fortan sollen $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ resp. vom Multiplikationsgrade $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots\ldots, 2^{\alpha_k}$ vollständig disjunktive Elemente von $\mathfrak{G}$ mit der Ordnung 2^n bedeuten.

Hilfssatz 1: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.

Beweis: Ist $k=2$, so folgt $A_2 = A_1^{-1}$ aus $A_1 + A_2 = E_1$, $A_1A_2 = E_0$, also gilt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + (n - \alpha_1) = n\,.$$

Bis $k-1$ sei dies schon bewiesen; dann folgt, da nach Satz II., 5

$$\mathfrak{G}_{p(A_k^{-1})} = [A_k]_{e_0}$$

1) Proc. **6** (1930), 301.

ist, $A_i < \mathfrak{G}_{p(A_k^{-1})}$

aus $A_i A_k = E_0\,, \qquad 1 \leqq i \leqq k-1\,.$

Daher sind $A_i A_k^{-1} = A_i(A_k^{-1}E_1) = A_i\,.$

Ferner ist $\sum_{i=1}^{k} A_i = E_1\,,$

$$A_k^{-1}\sum_{i=1}^{k} A_i = A_k^{-1}E_1\,,$$

also $\sum_{i=1}^{k-1} A_i = A_k^{-1}E_1\,,$

und da $A_i A_j = E_0\,, \quad i \neq j\,, \quad 1 \leqq i\,, \quad j \leqq k-1\,,$

so sind $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{k-1}$ die vollständig disjunktiven Elemente von $\mathfrak{G}_{p(A_k^{-1})}$. Ferner sind nach Sätze I., 10 und II., 2 die Multiplikationsgrade von $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{k-1}$ in Bezug auf $\mathfrak{G}_{p(A_k^{-1})}$ resp. $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots\ldots, 2^{\alpha_{k-1}}$ und die Ordnung von $\mathfrak{G}_{p(A_k^{-1})}$ $2^{n-\alpha_k}$. Daher gilt der Annahme wegen

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = n - \alpha_k\,,$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n\,.$$

Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Von nun ab nehmen wir an, dass

$$A_i \neq E_0 \quad \text{d.h.} \quad 1 \leqq \alpha_i < n\,, \quad 1 \leqq i \leqq k\,.$$

Hilfssatz 2: Aus

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i A_i = E_1\,, \qquad \mu = 0 \text{ oder } 1, \quad 0A = E_0$$

folgt $\mu_i = 1\,, \qquad 1 \leqq i \leqq k\,.$

Beweis: Wäre etwa $\mu_1 = 0$, so würde

$$A_1 = A_1 E_1 = A_1 \sum_{i=1}^{k} \mu_i A_i = \sum_{i=2}^{k} \mu_i A_1 A_i = E_0$$

sein.

Hilfssatz 3: Die 2^k Elemente

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i A_i\,, \qquad \mu = 0 \text{ oder } 1,$$

bilden ein Untersystem $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ von der Ordnung 2^k.

Beweis: $H_1 + H_2 < \mathfrak{H}$ ist klar.

$$H_1 H_2 = \Big(\sum_{i=1}^{\lambda} A_{\rho_i} + \sum_{i=\lambda+1}^{\mu} A_{\rho_i}'\Big)\Big(\sum_{i=1}^{\lambda} A_{\rho_i} + \sum_{i=\lambda+1}^{\nu} A_{\rho_i}''\Big) \qquad (A' \neq A'')$$

$$= \sum_{i=1}^{\lambda} A_{\rho_i} + \sum_{i=\lambda+1}^{\mu} \sum_{j=\lambda+1}^{\nu} A_{\rho_i}' A_{\rho_j}'' = \sum_{i=1}^{\lambda} A_{\rho_i} < \mathfrak{H}\,.$$

$$E_0,\ E_1 < \mathfrak{H}.$$

$$H^{-1} = (\sum_{i=1}^{k} A_{\rho_i})^{-1} = \sum_{i=\lambda+1}^{k} A_{\rho_i} < \mathfrak{H}.$$

Daher ist $\mathfrak{H}$ ein Untersystem von $\mathfrak{G}$.

Ein Gleichheit von der Form

$$\sum_{i=1}^{\mu} A_{\rho_i} = \sum_{i=1}^{\nu} A_{\rho_i}'$$

kann aber nur dann bestehen, wenn die Summanden auf der beiden Seiten bis auf die Reihenfolge miteinander übereinstimmen. Denn käme etwa A_{ρ_1} nicht auf der rechten Seite vor, so gelte

$$A_{\rho_1}^{-1} + \sum_{i=1}^{\mu} A_{\rho_i} = A_{\rho_1}^{-1} + \sum_{i=1}^{\nu} A_{\rho_i}',$$

d.h.
$$E_1 = \sum_{i=2}^{k} A_{\rho_i} + \sum_{i=1}^{\nu} A_{\rho_i}',$$

wo A_{ρ_1} nicht auf der rechten Seite vorkommen kann, was dem Hilfssatze 2 widerspricht. Daher sind die Elemente

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i A_i, \qquad \mu = 0 \text{ oder } 1,$$

alle voneinander verschieden, also ist die Ordnung von $\mathfrak{H}$ gleich 2^k.

Hilfssatz 4: Es gibt in $\mathfrak{G}$ ein und nur ein System von n vollständig disjunktiven Elementen $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$, deren Multiplikationsgrade alle 2 sind.

Beweis: 1) Ein System von vollständig disjunktiven Elementen, deren Multiplikationsgrade alle 2 sind, enthält nach Hilfssatz 1 genau n Elemente.

2) Es seien nun $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ ein System von vollständig disjunktiven Elementen, $2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \ldots\ldots, 2^{\alpha_k}$, $1 \leqq \alpha_i < n$, deren Multiplikationsgrade. Wenn dann etwa $\alpha_1 > 1$ ist, so gibt es von E_0 verschiedene, vollständig disjunktive Elemente $A_1', A_2', \ldots\ldots, A_l'$ von $\mathfrak{G}_{p(A_1)}$, deren Multiplikationsgrade $2^{\alpha_1'}, 2^{\alpha_2'}, \ldots\ldots, 2^{\alpha_l'}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ alle $< 2^{\alpha_1}$ und $\geqq 2$ sind; d.h.

$$1 \leqq \alpha_1',\ \alpha_2',\ \ldots\ldots,\ \alpha_l' < \alpha_1.$$

Nun ist
$$\sum_{i=1}^{l} A_i' + \sum_{i=2}^{k} A_i = A_1 E_1 + \sum_{i=2}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} A_i = E_1,$$

und aus
$$A_j A_1 = A_j \sum_{i=1}^{l} A_i' = \sum_{i=1}^{l} A_j A_i' = E_0, \qquad 2 \leqq j \leqq k,$$

folgt
$$A_i' A_j = E_0.$$

Mithin sind die Elemente

$$A_1', \ A_2', \ \ldots\ldots, \ A_l', \ A_2, \ \ldots\ldots, \ A_k$$

ein System von vollständig disjunktiven Elementen von $\mathfrak{G}$. In solcher Weise ist es möglich, den Multiplikationsgrad jedes Elementes bis zum 2 zu reduzieren, ohne dahei die vollständige Disjunktion zu beschädigen. Daher existiert ein System von der verlangten Art.

3) Wäre $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ und $B_1', B_2', \ldots\ldots, B_n'$ zwei verschiedene Systeme von der verlangten Art mit

$$B_1 \neq B_i', \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

so würde $B_1 B_i' = E_0$, da die Multiplikationsgrade von B_1 und B_i' 2 sind. Also

$$B_1 = B_1 E_1 = B_1 \sum_{i=1}^{n} B_i' = E_0,$$

was unmöglich ist.

Satz: Ein Element A vom Multiplikationsgrad 2^r lässt sich eindeutig darstellen in der Form

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i B_i, \qquad \mu = 0 \ \text{oder} \ 1,$$

wobei $0B = E_0$ gesetzt und genau r Koeffizienten gleich 1 sind.

Beweis: Die eindeutige Darstellbarkeit ist ohne weiteres ersichtlich nach Hilfssätze 3 und 4. Ist nun $A = \sum_{i=1}^{m} B_{\rho_i}$, dann bilden $B_{\rho_1}, B_{\rho_2}, \ldots\ldots, B_{\rho_m}$ relativ zu $\mathfrak{G}_{p(A)}$ ein System von der in Hilfssatz 4 erwähnten Art. Da $\mathfrak{G}_{p(A)}$ von der Ordnung 2^r, so ist $m = r$, w.z.b.w.