PAPERS COMMUNICATED

9. *Zur Theorie der natürlichen Zahlen.*

By Teiji TAKAGI, M.I.A.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. Feb. 12, 1931.)

In seinem kürzlich erschienenen schönen Werkchen: *die Grundlage der Analysis* hat E. Landau auf die unzulängliche Begründung der induktiven Definition der Addition natürlicher Zahlen, wie sie nach Peano geläufig ist, hingewiesen und eine überraschend einfache, Herrn Dr. Kalmar in Szeged zugeschriebene Methode angegeben, um die Mangel gut zu machen. In Anschluss daran lasse ich hier einige Bemerkungen folgen.

Das Peano'sche Axiomensystem lautet bekanntlich wie folgt:

(1) 1 ist eine natürliche Zahl.

(2) Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es eine und nur eine „nächst folgende" x'.

(3) Für jedes x ist $1 \neq x'$.

(4) Es ist $x'=y'$ nur dann, wenn $x=y$.

(5) Eine Menge der natürlichen Zahlen, welche 1 enthält und mit jedem x auch x' enthält, enthält überhaupt alle natürlichen Zahlen.

Wir wollen nun in Verallgemeinerung von $x'=F(x)$ alle diejenige „ähnliche Abbildung" $F(x)$ bestimmen, die der Bedingung

$$F(x')=F(x)'$$

genügt. Setzt man zunächst $F(1)=1$ bez. $1'$, so kommt $F(x)=x$ bez. x' als alleinige Lösung heraus, wie nach Axiom 5 ersichtlich. Indem wir $F(x)=x$ ausschliessen, setzen wir, unter a eine beliebig gegebene natürliche Zahl verstehend, $F(1)=a'$, und schreiben anstatt $F(x)$ ausführlicher $F_a(x)$, so dass die Bedingungen nunmehr lauten:

$$F_a(1)=a', \tag{1}$$

$$F_a(x')=(F_a(x))'. \tag{2}$$

(Natürlich ist $F_a(x)$ als die a-te Iteration von $x'=F_1(x)$ d.h. $x+a$ gedacht: $a+x$ bei Landau.)

Es gilt nun *allein auf Grund von den Axiomen* 1–5 nachzuweisen, dass unter den angegebenen Bedingungen $F_a(x)$ überhaupt möglich ist, wovon die Notwendigkeit „von Peano und seinen Nachfolgern übersehen worden ist."[1] Der Beweis geschieht durch Induktion nach a wie bei Landau:

Erstens: für $a=1$ genügt der Ansatz: $F_1(x)=x'$. Denn alsdann $F_1(1)=1'$ und $F_1(x')=(x')'=(F(x))'$.

Zweitens sei angenommen: es existire $F_a(x)$. Dann wird für $p=a'$ die Forderung durch $F_p(x)=F_a(x')$ erfüllt, denn

$$F_p(1)=F_a(1')=(F_a(1))'=(a')'=p',$$
$$F_p(x')=F_a((x')')=(F_a(x'))'=(F_p(x))'.$$

Nach Axiom 5 ist hiermit die Existenz von $F_a(x)$ bewiesen.

Der Beweis für die Eindeutigkeit von $F_a(x)$ gelingt, wie schon bei Peano, leicht durch Induktion nach x. Alsdann folgt, dass *notwendig* (nicht nur hinreihend)

$$F_1(x)=x', \tag{3}$$
$$F_{a'}(x)=F_a(x') \tag{4}$$

sein musste.

Es ist bemerkenswert, dass aus der Eindeutigkeit von $F_a(x)$ das assoziative und das kommutative Gesetz direkt (ohne Induktion) hergeleitet werden kann, was noch kurz angeführt sei.

Setzt man $F_b(F_a(x))=\varphi(x)$, so ist nach (1), (2)

$$\varphi(1)=F_b(F_a(1))=F_b(a')=(F_b(a))',$$
$$\varphi(x')=F_b(F_a(x'))=F_b(F_a(x)')=(F_b(F_a(x)))'=(\varphi(x))',$$

also $\varphi(x)=F_c(x)$ mit $c=F_b(a)$, d.h. $(x+a)+b=x+(a+b)$.

Setzt man zweitens $F_x(y)=\varphi(x)$, so ist nach (3), (4)

$$\varphi(1)=F_1(y)=y',$$
$$\varphi(x')=F_{x'}(y)=F_x(y')=(F_x(y))'=(\varphi(x))',$$

also $\varphi(x)=F_y(x)$, d.h. $y+x=x+y$.

---

1) Landau, a. a. O., X.