54. Ein Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1934.)

Wir beweisen folgendes Kriterium für normale einfache hyperkomplexe Systeme.[1]

Es seien $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ eine Basis eines Systems über einem vollkommenen Körper K. Die n^2 Elemente $e_i x e_j$ mit einem Unbestimmten $x = \sum e_i x_i$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn das System normal-einfach ist.

Bedeutet (e) bzw. (x) die einzeilige Matrix mit Elementen e_i bzw. die einspaltige Matrix mit Elementen x_i, so ist ersichtlich $x=(e)(x)$. Nimmt man eine andere Basis (e') mit $(e)=(e')P$ an, so ist $x=(e')(x')$ mit $(x')=P(x)$. Bezeichnet man unser System mit $\mathfrak{S}$, so wird der Modul $\mathfrak{S}x\mathfrak{S}$ durch die n^2 Elemente erzeugt. Also ist die Anzahl $n(\mathfrak{S})$ der linearen unabhängigen Elemente unter den $e_i x e_j$ gleich dem Rang des Moduls $\mathfrak{S}x\mathfrak{S}$ und sie ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir jetzt unseren Satz. Die n^2 Elemente $e_i x e_j$ seien linear unabhängig, d.h. $n(\mathfrak{S})=n$. Ist das Radikal von $\mathfrak{S}$ von Null verschieden, so gibt es ein Element $a \neq 0$ aus $\mathfrak{S}$, das der Bedingung $a\mathfrak{S}a=0$ genügt. Dafür braucht man a nur aus einem nilpotenten Ideal $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}^2=0$ anzunehmen. Da man a als ein Basiselement annehmen kann, so ist gegen der Voraussetzung $n(\mathfrak{S}) < n^2$. Daher ist $\mathfrak{S}$ halbeinfach.

Ist $\mathfrak{S}$ nicht einfach, also $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2$, so ist $a_1\mathfrak{S}a_2=0$ für a_1 aus $\mathfrak{S}_1$ und a_2 aus $\mathfrak{S}_2$, also ist gegen der Voraussetzung auch $n(\mathfrak{S}) < n^2$. Daher ist $\mathfrak{S}$ einfach.

Ist $\mathfrak{S}$ nicht normal, so ist $xa=ax$ für ein in K nicht enthaltenes Element a aus dem Zentrum, also ist gegen der Voraussetzung $n(\mathfrak{S}) < n^2$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{S}$ normal-einfach sein muss.

Die Umkehrung kann man folgendermassen beweisen. Es ist

$$axb = a(e)(x)b = (e)A\bar{B}(x).$$

---

1) Dieser Satz für einen reellabgeschlossenen Körper K findet sich wesentlich schon bei F. Ringleb, Beiträge zur Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen I, Rendiconti Palermo **57** (1933), 311–340.

für a, b aus $\mathfrak{S}$, wo A bzw. $\bar{B}$ die reguläre direkte bzw. reziproke Darstellung von $\mathfrak{S}$ bedeutet. Diese Darstellungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$. Sie sind beide in K_n enthalten, wobei wir unter K_n wie üblich das vollständige Matrizensystem des Grades n in K verstehen. Die Gesamtheit der mit $\mathfrak{A}$ elementweise vertauschbaren Elemente bildet ein Untersystem von K_n, welches wir mit $V(\mathfrak{A})$ bezeichnen. Ist der Rang von $V(\mathfrak{A})$ gleich n', so ist nach R. Brauer[1] $n^2=nn'$, also $n=n'$. Da $\bar{\mathfrak{A}}$ ersichtlich in $V(\mathfrak{A})$ erthalten ist, so ist $\bar{\mathfrak{A}}=V(\mathfrak{A})$. Daher ist nach einem Satz von R. Brauer[1] $K_n=\mathfrak{A}\times\bar{\mathfrak{A}}$. Daraus folgt unsere Behauptung, da $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}$ durch die Matrizen $A\bar{B}$ erzeugt wird.[2]

Ist der Kompositionsregel eines hyperkomplexen Systems $\mathfrak{S}$ durch

$$e_ie_j=\sum_k e_k a_{ij}^k$$

gegeben, so gilt bekanntlich: Ein System $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann halbeinfach, wenn die Determinante

$$|d_{ip}|, \qquad d_{ip}=\sum_{k,\,q} a_{ip}^k a_{kj}^q \qquad (q=j)$$

von Null verschieden ist. Dabei soll die Charakteristik von K gleich Null oder gleich einer zu n primen Primzahl sein.

Nach unserem Satz erhalt man ohne Mühe

Ein System $\mathfrak{S}$ ist dann und nur dann normal-einfach, wenn die Determinante

$$|d_{ij,\,pq}|, \qquad d_{ij,\,pq}=\sum_k a_{ip}^k a_{kj}^q$$

von Null verschieden ist.

1) R. Brauer: Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, Journal für Math. **166** (1932), 241–252. Vgl. auch E. Noether: Nichtkommutative Algebra, Math. Zeitschr. **37** (1933), 514–541. K. Shoda: Über die Galoissche Theorie der halbeinfachen hyperkomplexen Systeme, Math. Ann. **107** (1932), 252–257.

R. Brauer hat nämlich bewiesen:

I. $V(\mathfrak{S}')$ für ein einfaches Untersystem $\mathfrak{S}'$ ist einfach und $V(V(\mathfrak{S}'))=\mathfrak{S}'$.

II. Das Zentrum von $\mathfrak{S}'$ bzw. $V(\mathfrak{S}')$ ist der Durchschnitt $[\mathfrak{S}', V(\mathfrak{S}')]$.

III. Der Rang von $\mathfrak{S}$ ist gleich dem Produkt des von $\mathfrak{S}'$ und des von $V(\mathfrak{S}')$.

IV. Ist $\mathfrak{S}'$ normal, so ist $\mathfrak{S}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{S}'$ und $V(\mathfrak{S}')$.

In der oben genannten Arbeit habe ich nur die Behauptung I formuliert. II folgt unmittelbar aus der Definition von $V(\mathfrak{S}')$. III folgt leicht aus der Anmerkung 9) durch Berechnung der Rangzahlen. — Ich gebe hier einen neuen Beweis für IV an. Ist L ein gemeinsamer Zerfällungskörper von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, so sind bekanntlich $\mathfrak{S}_L$ und $\mathfrak{S}_L'$ beide einfach und zwar sind sie bzw. zu L_r und L_s isomorph. Ferner zerfällt $\mathfrak{S}_L'$ als Untersystem von $\mathfrak{S}_L$ in $\frac{s}{r}$ zueinander äquivalente Bestandteile. Jetzt ist ersichtlich, dass $\mathfrak{S}_L$ das direkte Produkt von $\mathfrak{S}_L'$ und $V(\mathfrak{S}_L')$ ist. Daraus folgt unsere Behauptung IV nach Hilfssatz 2 in der oben genannten Arbeit von mir.

2) Diese Umkehrung kann man auch leicht beweisen, wenn man $\mathfrak{S}_L x \mathfrak{S}_L$ betrachtet, wo L einen Zerfällungskörper von $\mathfrak{S}$ bedeutet.

Die Matrix (d_{ip}) kann man aus $(d_{ij,\,pq})$ nach

$$d_{ip}=\sum_{q} d_{ij,\,pq} \qquad (q=j)$$

ableiten. Stellt man also die Matrix $(d_{ij,\,pq})$ durch (D_{ip}) dar, wo D_{ip} die Matrix $(d_{ij,\,pq})$ des Grades n bedeutet, so ist

$$(d_{ip})=(\mathrm{Sp}\, D_{ip})\,.$$

Dabei bedeutet $\mathrm{Sp}\, D_{ip}$ die Spur der Matrix D_{ip}.