PAPERS COMMUNICATED

123. Über das Produkt zweier Algebrenklassen mit zueinander primen Diskriminanten.

Von Kenjiro SHODA und Tadasi NAKAMURA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka;
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1934.)

I. *Die Diskriminante*[1] *des Produktes zweier Algebrenklassen* A, B *mit zueinander primen Diskriminanten* $\mathfrak{d}_A$, $\mathfrak{d}_B$ *ist das Produkt der Diskriminanten*: $\mathfrak{d}_{AB}=\mathfrak{d}_A\mathfrak{d}_B$.

Bedeutet $n_\mathfrak{p}$ nämlich den $\mathfrak{p}$-Index einer Algebrenklasse A, so ist nach H. Hasse[2] bekannt, dass die Hassesche $\mathfrak{p}$-Invariante $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ ein reduzierter Bruch mit dem Nenner $n_\mathfrak{p}$ ist, und dass sie der Gleichung

$$\left(\frac{AB}{\mathfrak{p}}\right)\equiv\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)+\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

genügt. Da jetzt die Diskriminanten von A und B zueinander prim

---

1) K. Shoda: Diskriminantensatz für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 315–317. Diskriminantenformel für normale einfache hyperkomplexe Systeme, Proc. **10** (1934), 318–321. In diesen beiden Arbeiten haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Maximalordnung von $\mathfrak{S}$ bzw. Z eine Basis besitzt, wie es immer der Fall ist, wenn der Grundkörper K rationaler Zahlkörper ist. Weil nicht notwendig die Basis vorhanden ist, so hat man im allgemeinen die Definition der Diskriminante folgendermassen zu modifizieren. Als Diskriminante im Grossen hat man nämlich das Produkt der Diskriminanten der $\mathfrak{p}$-adischen Grenzmengen zu betrachten, die bekanntlich Basis besitzen.

Diese Definition ist ersichtlich äquivalent mit dem folgenden: Der grösste gemeinsame Idealteiler der Diskriminanten aller Systeme von N linear unabhängigen Elementen der Maximalordnung heisst die Diskriminante (im Grossen).

Daher ist die Diskriminante nicht notwendig Hauptideal in K. Trotzdem gelten die Sätze ohne Ausnahme, wie man leicht sehen kann.

Für unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ ist es zweckmässig auch das Zerlegungsgesetz $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^{n_\mathfrak{p}}$ vorauszusetzen, wie es in der Klassenkörpertheorie üblich ist. Dementsprechend setzen wir voraus, dass der $\mathfrak{p}$-Komponent der ergänzten Diskriminante für unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ auch gleich $\mathfrak{p}^{\left(1-\frac{1}{n_\mathfrak{p}}\right)}$ ist. Nach dieser Voraussetzung gelten I und II in der vorliegenden Arbeit auch für die durch unendliche Primstellen ergänzten Diskriminanten. [Vgl. die *Berichtigung* am Schluss.]

2) H. Hasse: Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppen über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. **107** (1933), 731–760.

sind, so bilden die beiden Systeme der von 1 verschiedenen $\mathfrak{p}$-Indizen von A und B zusammen das System der von 1 verschiedenen $\mathfrak{p}$-Indizen von AB. Daraus folgt unser Satz nach der Diskriminantenformel für Algebrenklassen.[1)]

Nach der Diskriminantenformel für normale einfache Systeme[1)] erhält man ohne Mühe

II. *Die Diskriminante des Produktes zweier normalen einfachen Systeme* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ *mit primen Diskriminanten ist gleich* $\mathfrak{d}_{\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}}=\mathfrak{d}_{\mathfrak{S}}^{M^2}\mathfrak{d}_{\mathfrak{T}}^{N^2}$, *wo* N *bzw.* M *den Rang von* $\mathfrak{S}$ *bzw.* $\mathfrak{T}$ *bedeutet.*

Man beweist leicht

III. *Eine Ordnung* $\mathfrak{o}$ *in einem normalen einfachen System* $\mathfrak{S}$ *ist dann und nur dann Maximalordnung, wenn ihre* $\mathfrak{p}$*-adische Grenzmenge für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *Maximalordnung von* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ *ist.*

Es sei nämlich $\mathfrak{o}'$ eine $\mathfrak{o}$ enthaltende Maximalordnung, also $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}'=\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$. Ist α ein in $\mathfrak{o}$ nicht liegendes Element aus $\mathfrak{o}'$, so bilden die ganzen Zahlen g des Grundkörpers K mit $\alpha g\in\mathfrak{o}$ ein Ideal $\mathfrak{g}$ in K. Ist $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist α gegen der Voraussetzung in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ nicht enthalten. Denn aus $\alpha\in\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ folgt $\alpha\equiv\gamma \pmod{\mathfrak{p}^s}$ für beliebiges s und für γ aus $\mathfrak{o}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{g}=1$ und gegen der Voraussetzung $\alpha\in\mathfrak{o}$ ist.

Die Elemente der Maximalordnungen $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ erzeugen eine Ordnung von $\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$. Diese Ordnung heisst das direkte Produkt von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$, und sie wird mit $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}\times\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ bezeichnet.

IV. *Sind die Diskriminanten zweier normalen einfachen Systeme* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ *prim, so ist das direkte Produkt der Maximalordnungen* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ *und* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ *eine Maximalordnung von* $\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$.

Da die Diskriminanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ prim sind, so zerfällt mindestens eines von den $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von K. Daher gilt dieser Satz bekanntlich im Kleinen und folglich nach III. auch im Grossen.

Wir beweisen nun die Umkehrung.

V. *Ist das direkte Produkt von* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ *und* $\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ *eine Maximalordnung von* $\mathfrak{S}\times\mathfrak{T}$, *so sind die Diskriminanten von* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T}$ *prim.*

Sind nämlich die Diskriminanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ nicht prim, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$, für das die beiden $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ nicht zerfallen. Ist dabei $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ Matrizensystem des Grades u bzw. v im Körper $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$, so ist $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}\times\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}=(\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}\times\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}})_{uv}$. Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, dass das direkte Produkt der Maximalordnungen von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$ keine Maximalordnung von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}\times\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$ ist. Wir beschränken uns jetzt auf den Fall dass $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ normale Körper über $K_{\mathfrak{p}}$ sind. Wir setzen ferner voraus, dass $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ von $K_{\mathfrak{p}}$ verschieden sind, und wir beweisen, dass $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ keine Maximalordnung von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ ist.

Wir betrachten die Hassesche Darstellung $\mathfrak{S}=(p, \pi_1, K_{\mathfrak{p}}(\omega_1))$ bzw. $\mathfrak{T}=(p, \pi_2, K_{\mathfrak{p}}(\omega_2))$ und die zu $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$ bzw. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ isomorphe Ordnung, deren Basis $W_1^i P_1^k$ $(i, k=0, \ldots\ldots, n-1;\ n^2=N)$ bzw. $W_2^j P_2^l$ $(j, l=0, \ldots\ldots, m-1;\ m^2=M)$ ist. Dabei sind[3]

$$W_1=\begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_1^{\pi_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_1^{\pi_1^{n-1}} \end{pmatrix}, \qquad P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad 1 \\ p & 0 & 0\cdots\cdots 0 \end{pmatrix};$$

$$W_2=\begin{pmatrix} \omega_2 & & & \\ & \omega_2^{\pi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_2^{\pi_2^{m-1}} \end{pmatrix}, \qquad P_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad 1 \\ p & 0 & 0\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die Kroneckerschen Produkte $W_1^i P_1^k \times W_2^j P_2^l$ eine Basis einer zu $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ isomorphen Ordnung. Wenn man nun die Norm dieser Ordnung in bezug auf die Matrizenbasis ausrechnet, so erkennt man leicht, dass die Diskriminante von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ durch $\mathfrak{p}^{mn(m(n-1)+n(m-1))MN}$ teilbar ist.[4] Die Diskriminante von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ ist gleich $\mathfrak{p}^{(1-\frac{1}{r})M^2N^2}$, wobei r der Index von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ also sicher nicht grösser als mn ist. Es ist aber

$$\begin{aligned} mn-(m(n-1)+n(m-1))-\left(1-\frac{1}{r}\right)MN &= mn(m(n-1)+n(m-1)) \\ -\left(1-\frac{1}{r}\right)m^2n^2 = mn\left(mn-m-n+\frac{mn}{r}\right) &\geqq mn(mn-m-n+1) \\ = mn(m-1)(n-1) > 0, & \end{aligned}$$

da $m, n > 1$ ist. Daher ist die Diskriminante von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ von der Diskriminante von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$ verschieden und folglich ist $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ keine Maximalordnung von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir studieren nun die Idealtheorie in der Maximalordnung $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein (zweiseitiges) Ideal in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in K, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}$ sein Primidealteiler in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}}$, also $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{n_{\mathfrak{p}}}$. Ist $n_{\mathfrak{p}} > 1$, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_{\mathfrak{T}}$, da die Diskriminanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ prim sind. Bedeutet $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}^n$ die Zerlegung von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$, so ist n der $\mathfrak{p}$-Index von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{T}$, also gleich $n_{\mathfrak{p}}$, falls $m_{\mathfrak{p}}=1$ ist. Daher ist $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{T}}$. Ist

3) H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495–534.

4) Vgl. die in Fussnote 1) zitierte zweite Arbeit, insbesondere den Beweis von I.

dagegen $m_\mathfrak{p}>1$, so ist $n_\mathfrak{p}=1$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{S}\mathfrak{o}_\mathfrak{T}=(\mathfrak{P}_\mathfrak{T}\mathfrak{o}_\mathfrak{S})^{m_\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}$. Also erhält man

VI. *Das Ideal* $\mathfrak{P}_\mathfrak{S}\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ *ist dann und nur dann Primideal in* $\mathfrak{o}_\mathfrak{S}\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$, *wenn* $m_\mathfrak{p}=1$ *ist.*

Umgekehrt lässt sich jedes Primideal in $\mathfrak{o}_\mathfrak{S}\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ entweder in der Form $\mathfrak{P}_\mathfrak{S}\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ oder in der Form $\mathfrak{P}_\mathfrak{T}\mathfrak{o}_\mathfrak{S}$ darstellen. Daher gilt

VII. *Jedes Ideal* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{o}_\mathfrak{S}\times\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ *lässt sich in der Form* $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_\mathfrak{S}\mathfrak{A}_\mathfrak{T}$ *darstellen, wo* $\mathfrak{A}_\mathfrak{S}$ *bzw.* $\mathfrak{A}_\mathfrak{T}$ *Ideal in* $\mathfrak{o}_\mathfrak{S}$ *bzw.* $\mathfrak{o}_\mathfrak{T}$ *ist.*

Diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig. Wenn man aber als $\mathfrak{A}_\mathfrak{T}$ nur das Potenzprodukt der Primideale $\mathfrak{P}_\mathfrak{T}$ annimmt, für die $n_\mathfrak{p}=1$, $m_\mathfrak{p}>1$ sind, so erweist sich diese Zerlegung als eindeutig. Die beiden Sätze VI und VII bedeuten eine Verallgemeinerung des Satzes, dass das Zerlegungsgesetz des Primideals $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers K in der Maximalordnung eines normalen einfachen Systems nur vom $\mathfrak{p}$-Index, also nur von der zugehörigen Algebrenklasse abhängig ist.

Zum Schluss sei noch bemerkt:

VIII. *Es sei* L *ein algebraischer Zahlkörper über* K, $\mathfrak{o}_L$ *seine Maximalordnung. Das direkte Produkt* $\mathfrak{o}_\mathfrak{S}\times\mathfrak{o}_L$ *ist dann und nur dann Maximalordnung von* $\mathfrak{S}\times L$, *wenn die Diskriminante von* $\mathfrak{S}$ *zur Relativdiskriminante von* L *prim ist, und wenn der* $\mathfrak{p}$*-Index von* $\mathfrak{S}$ *stets zum* $\mathfrak{P}$*-Grad von* L *für jeden Primteiler* $\mathfrak{P}$ *prim ist.*

Denn die Diskriminante von $\mathfrak{S}_L$ ist nach G. Köthe[5] gleich

$$\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\left(1-\frac{(n_\mathfrak{p},\, l_\mathfrak{p})}{n_\mathfrak{p}}\right)N^2},$$

wo $l_\mathfrak{P}$ den $\mathfrak{P}$-Grad von L bedeutet.

Berichtigung: Auf S. 319 der in Fussnote 1) zitierten zweiten Arbeit ist die Diskriminante von $\mathfrak{S}$ gleich der r^4-ten Potenz der von $\mathfrak{K}$. Daraus müssen die folgenden Berichtigungen folgen. Die Diskriminantenformel wird durch $\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{\left(1-\frac{1}{m_\mathfrak{p}}\right)n^2}$ gegeben. Die Diskriminante für Algebrenklassen soll dann durch dem formalen Ausdruck $\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{1-\frac{1}{m_\mathfrak{p}}}$ definiert werden. Auf S. 321 werden „$m_\mathfrak{p}$-te Potenz" und „$\frac{n}{m_\mathfrak{p}}$-te Potenz" beides „n-te Potenz."

5) G. Köthe: Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren, Math. Ann. **107** (1933), 761–766.