PAPERS COMMUNICATED

24. Über die Klassenzahlen abelscher Zahlkörper.

Von Eizi INABA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Mar. 12. 1935.)

Es seien k_1 und k_2 unabhängige abelsche Körper über dem rationalen Zahlkörper $R : k_1 \cap k_2 = R$. $\bar{k}$ sei das Kompositum von k_1 und k_2. Der absolute Klassenkörper $\bar{K}$ zu $\bar{k}$ enthält nach dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie das Kompositum von $\bar{k}$ und dem absoluten Klassenkörper K_1 zu k_1. $\bar{K}$ enthält folglich K_1. Ebenso ist ersichtlich, dass $\bar{K}$ den absoluten Klassenkörper K_2 zu k_2 in sich enthält.[1] Wenn ferner D der Durchschnitt von K_1 und K_2 ist, dann gilt bekanntlich

$$[K_1 : R]\,[K_2 : R] = [K_1 K_2 : R]\,[D : R].$$

Weil aber $K_1 K_2$ in $\bar{K}$ enthalten ist, geht also $[K_1 : R]\,[K_2 : R]$ in $[\bar{K} : R]\,[D : R]$ auf. Wegen $[k_1 : R]\,[k_2 : R] = [\bar{k} : R]$ folgt hieraus:

$$[K_1 : k_1]\,[K_2 : k_2] \mid [\bar{K} : \bar{k}]\,[D : R].$$

Wenn nun die Diskriminanten von k_1 und k_2 teilerfremd sind, dann ist natürlich $D = R$. Also gilt der folgende

Satz 1. Das Produkt der Klassenzahlen mehrerer abelscher Zahlkörper, deren Diskriminanten zu je zweien teilerfremd sind, geht in die Klassenzahl ihres Kompositums auf.

Es lässt sich noch in gewissen Fällen leicht ersehen, dass K_1 und K_2 unabhängig sind d.h. D mit R zusammenfällt.

Die grössten absolut-abelschen Unterkörper von K_1 und K_2 seien nun k_1' und k_2' resp. Der Durchschnitt d' von k_1' und k_2' ist natürlich der grösste absolut-abelsche Unterkörper von D. D muss also über d' abelsch sein. Wenn speziell $d' = R$ ist, dann ist $D = R$. Denn $d' = R$ muss alsdann der grösste abelsche Unterkörper von D sein. Also lässt sich zeigen, dass $D = R$ ist, wenn die Körpergrade von k_1 und k_2 relativ prim sind.

In der Tat sei H die k_1' zugeordnete Idealgruppe in k_1 und C eine beliebige Idealklasse nach H. Wenn ein Ideal $\mathfrak{a}$ in k_1 zu C angehört,

---

1) Hierbei verstehe man „absolute Klassenkörper" und „Klassenzahlen" entweder im weiteren Sinne oder im engeren Sinne.

so ist $N(\mathfrak{a})$ in C^n enthalten, wobei n den Grad von k_1 bezeichnet.[1] Folglich $C^n < H$, was besagt, dass $[k_1' : k_1]$ nur durch die Primfaktoren von n teilbar ist. Falls also die Körpergrade von k_1 und k_2 relativ prim sind, dann sind auch die Körpergrade von k_1' und k_2' relativ prim, d.h. $d' = R$, w.z.b.w. Hieraus ergibt sich sofort der folgende

Satz 2. Das Produkt der Klassenzahlen mehrerer abelscher Zahlkörper, deren Grade zu je zweien teilerfremd sind, geht in die Klassenzahl ihres Kompositums auf.

Dieser Satz enthält den von Värmon mittels der bekannten Klassenzahlformel für abelsche Zahlkörper komplizierterweise bewiesenen Satz.[2]

Die Klassenzahl eines zyklischen Zahlkörpers ist teilbar durch das Produkt der Klassenzahlen von Unterkörpern, die zu je zweien unabhängig sind.

In der Tat ist die Klassenzahl unseres zyklischen Körpers durch die Klassenzahl des Kompositums der in Frage kommenden Unterkörper teilbar.[3] Also folgt dieser Värmonsche Satz sofort aus unseren Satz 2.

---

1) Vgl. H. Hasse, „Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage," Math. Zeitschr., 31 (1930), § 2. In Frage kommt dort nur der zyklische Körper, aber dasselbe gilt auch im abelschen Fall.

2) J. Värmon, „Über die Klassenzahlen Abelscher Körper," Arkiv för Math., 22 (1930).

3) Diese Tatsache rührt auch von Värmon her. Einfach wurde sie aber nachher von Herbrand bewiesen. Vgl. J. Herbrand, „Sur les classes des corps circulaires," Journ. de Math., 11 (1933), S. 420.