138. *Einige charakteristische Eigenschaften derjenigen ebenen Kurven, deren Affin- und Projektiv-normalen übereinstimmen.*

Von Shigeo SASAKI.

Mathematische Institut, Tohoku Universität, Sendai.

(Comm by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1935.)

1. Entsprechend einem Satz über diejenigen ebenen Kurve, deren gewöhnliche und affine Normalen überall zusammenfallen, wollen wir die folgenden Sätze beweisen.

Satz. Wenn die Affin- und Projektivnormalen einer ebenen Kurve überall übereinstimmen, so ist ihre Affinkrümmung eine lineare Funktion ihrer Affinbogenlänge.

Beweis. In der Umgebung eines Punktes einer ebenen Kurve, den wir zum Anfangspunkt der Messung der Affinlänge S annehmen wollen, kann man durch Wahl geeigneter lokalen Koordinaten die folgenden Reihenentwicklungen aufstellen[1]:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = s - \dfrac{k_0}{3!}s^3 - \dfrac{k_1}{4!}s^4 + \dfrac{k_0^2 - k_2}{5!}s^5 + \dfrac{4k_0k_1 - k_3}{6!}s^6 + \cdots\cdots, \\ x_2 = \dfrac{1}{2!}s^2 - \dfrac{k_0}{4!}s^4 - \dfrac{2k_1}{5!}s^5 + \dfrac{k_0^2 - 3k_2}{6!}s^6 + \cdots\cdots, \end{cases}$$

wo

$$k_n = \left(\frac{d^n k}{ds^n}\right)_{s=0}$$

und $k(s)$ die Affinkrümmung der Kurve ist.

Es sei die Gleichung der achtpunktig die Kurve berührenden Nodalkubik:

$$ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3 + ex_1^2 + fx_1x_2 + gx_2^2 = 0\,.$$

Setzen wir in diese Gleichung x_1, x_2 aus den Entwicklungen (1) ein, so lauten die Bedingungen für das identische Verschwinden der Glieder bis zur siebenten Ordnung:

$$e = 0\,,$$

$$a + \frac{f}{2!} = 0\,,$$

$$\frac{b}{2!} + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 g = 0\,,$$

$$-3\frac{k_0}{5!}a + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 c + \left(-\frac{k_0}{4!} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{k_0}{3!}\right)f = 0\,,$$

1) W. Blaschke: Differentialgeometrie, II, I Aufl., (1923), s. 35.

$$-3\frac{k_1}{4!}a+\left(-\frac{k_0}{4!}-2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_0}{3!}\right)b+\frac{d}{2!}+\left(-\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_1}{4!}-\frac{2k_1}{5!}\right)f$$
$$+\left(-2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_0}{4!}\right)g=0,$$

$$\left\{3\left(\frac{k_0}{3!}\right)^2+3\frac{k_0^2-k_2}{5!}\right\}a+\left\{-2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_1}{4!}-\frac{2k_1}{5!}\right\}b$$
$$+\left\{-\left(\frac{1}{2!}\right)^2\cdot\frac{k_0}{3!}-2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_0}{4!}\right\}c+\left\{\frac{1}{2!}\cdot\frac{k_0^2-k_2}{5!}+\frac{k_0}{3!}\cdot\frac{k_0}{4!}\right.$$
$$\left.+\frac{k_0^2-3k_2}{6!}\right\}f+\left\{-2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{2k_1}{5!}\right\}g=0.$$

Berechnet man die Koeffizienten a, b,...... nach diesen Gleichungen, so erhalten wir schliesslich als Gleichung der Kubik:

$$x_1^3-\frac{k_2}{3k_1}x_1^2x_2+k_0x_1x_2^2+\frac{6k_1^2-5k_0k_2}{15k_1}x_2^3-2x_1x_2+\frac{2k_2}{3k_1}x_2^2=0, \qquad (k_1\neq 0).$$

Die beiden Tangenten der Kubik im Anfangspunkte sind also

$$x_2=0, \qquad -x_1+\frac{2k_2}{3k_1}x_2=0.$$

Folglich ist die Bedingung dafür, dass die zweite Tangente, d.h. die Projektivnormale[1] gleichzeitig Affinnormale ist:

$$k_2=0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

2. Einige geometrische Eigenschaften der betrachteten Kurve.

Satz. Wenn die Affin- und Projektivnormalen einer Kurve überall übereinstimmten, dann ist

(I) die Inflexionslinie der die Kurve im Ursprung achtpunktig berührenden Nodalkubik zur Kurventangente im Ursprung parallel und umgekehrt;

(II) die Sanniasche Kubik schneidet die Kurventangente im Ursprung auch im unendlichfernen Punkt und umgekehrt.

Dieser Satz ist von der geometrischen Konstruktionen der Affin- und Projektivnormalen selbstverständlich.

---

1) G. Sannia: Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane, III, Atti della Accad. Lincei, 31_2 (1922), s. 17.