PAPERS COMMUNICATED

65. *Eine Bemerkung über die Summe und den Durchschnitt von zwei Idealen in einer Algebra.*

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1936.)

In der vorliegenden kurzen Note beweise ich

Satz. *Die Summe* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *von zwei Idealen*[1] $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in einer normaleinfachen*[2] *Algebra* A *über einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades*[3] K *ist dann und nur dann wieder ein Ideal in* A, *wenn für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *in* K *mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \supseteqq \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *oder* $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$,
2) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *besitzen die gemeinsame Linksordnung,*
3) $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *besitzen die gemeinsame Rechtsordnung,*

wo $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ *wie üblich die* $\mathfrak{p}$*-adische Grenzmenge* ($\mathfrak{p}$*-Komponente*) *von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bedeutet.*[4]

Genau dasselbe gilt für den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *von zwei Idealen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$. *Also ist* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ *dann und nur dann ein Ideal in* A, *wenn* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *es ist.*

Wir beginnen mit dem Beweis von

Hilfssatz 1. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien zwei beliebige Moduln in A. In der $\mathfrak{p}$-adischen Grenzalgebra $A_\mathfrak{p}$ gelten dann $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$.

Beweis. ξ sei ein beliebiges Element aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p}$. Man nehme ein η aus $\mathfrak{a}$ und ein ζ aus $\mathfrak{b}$ so, dass $\xi - (\eta + \zeta) \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ist. Dann ist

$$\xi = \big(\xi - (\eta+\zeta) + \eta\big) + \zeta\,; \qquad \xi - (\eta+\zeta) + \eta \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\,, \qquad \zeta \in \mathfrak{b}_\mathfrak{p}\,.$$

Daher ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} \subseteqq (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$. Da aber ersichtlich $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} \supseteqq (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$ ist, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathfrak{b}_\mathfrak{p})$.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, wählen wir eine ganze Zahl c aus K so, dass $c\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$ ist. $\mathfrak{p}^r$ sei der $\mathfrak{p}$-Anteil von c, und sei

---

1) Unter einem Ideal verstehe ich ein normales, d. h. ein Ideal, dessen Links- und Rechtsordnung maximal sind. Nicht-normales Ideal bezeichnen wir mit Modul.

Im folgenden stütze ich mich auf den Arbeiten:

E. Artin: Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5** (1928) S. 261–289; H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann. **104** (1931) S. 495–534; M. Deuring: Algebren, Ergebnisse der Math. Bd. **4** (1935).

2) Die entsprechende Frage in einer nicht-normaleinfachen Algebra wird leicht auf unseren Fall reduziert. Siehe M. Deuring, a. a. O., VI, § 1.

3) Unser Resultat gilt ohne weiteres auch für die Algebren über dem Quotientenkörper eines Integritätsbereiches, in dem jedes Ideal eindeutig als Primidealpotenzprodukt darstellbar ist.

4) Siehe H. Hasse, a. a. O. oder M. Deuring, a. a. O., VI.

$c=\mathfrak{p}^r\mathfrak{c}'$. Weiter sei $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_i, \cdots\cdots\to\infty$ eine Folge von natürlichen Zahlen. Man kann dann ganze Zahlen a_i aus $\mathfrak{c}'$ so bestimmen, dass $a_i\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{t_i}$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$.

Nun sei $\xi\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$, und sei

$$\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots, \eta_i, \cdots\cdots\to\xi \qquad (\eta_i\in\mathfrak{a})$$

eine nach ξ (im $\mathfrak{p}$-adischen Sinne) konvergente Folge von Elementen aus $\mathfrak{a}$. Jedes η_i mit Ausnahme von endlichvielen liegt in $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$. Man nehme also ein i_0 derart, dass $\eta_i\in\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$, und um so mehr $a_i\eta_i\in\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ für jedes $i\geqq i_0$ ist.

Da andererseits $\mathfrak{c}'$ der zu $\mathfrak{p}$ teilerfremde Bestandteil von c ist, so ist $\mathfrak{c}'\eta_i\subseteqq\mathfrak{b}_\mathfrak{q}$ für jedes von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{q}$ in K. Also $a_i\eta_i\in\mathfrak{b}_\mathfrak{q}$. Zusammenfassend erhält man $a_i\eta_i\in\mathfrak{b}$, also auch $a_i\eta_i\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ für jedes $i\geqq i_0$. Da aber $t_{i_0}, t_{i_0+1}, t_{i_0+2}, \cdots\cdots\to\infty$ und $a_i\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{t_i}$ ist, so konvergiert die Folge $a_i\eta_i$ $(i\geqq i_0)$ aus $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ auch nach ξ.

Daher ist $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_\mathfrak{p}\subseteqq(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})_\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_\mathfrak{p}=(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})_\mathfrak{p}$ wie behauptet.

Nach diesem Hilfssatz wird unser Satz leicht auf den folgenden entsprechenden Satz im Kleinen reduziert, da jeder Modul durch seine Komponenten bestimmt wird.[1]

Hilfssatz 2. *A sei eine normal-einfache Algebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $K_\mathfrak{p}$. Die Summe $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ von zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in A ist dann und nur dann ein Ideal in A, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1) $\mathfrak{a}\supseteqq\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{b}$,
2) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ besitzen die gemeinsame Linksordnung,
3) $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ besitzen die gemeinsame Rechtsordnung.

Genau dasselbe gilt für den Durchschnitt $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

Zunächst beweise ich

Hilfssatz 3. *$\mathfrak{o}$ sei eine Maximalordnung einer normal-einfachen Algebra A über $K_\mathfrak{p}$, und $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes, ganzes Rechts- bzw. Linksideal von $\mathfrak{o}$. Dann ist stets $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\neq\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}^{-1}\cap\mathfrak{b}^{-1}\neq\mathfrak{o}$.*

Beweis.[2] Es sei $\mathfrak{P}$ das zweiseitige Primideal von $\mathfrak{o}$. Wir bezeichnen die einfache Algebra $\mathfrak{o}/\mathfrak{P}$ mit $\bar{\mathfrak{o}}$, und ihr Rechtsideal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{P})/\mathfrak{P}$ bzw. Linksideal $(\mathfrak{b}, \mathfrak{P})/\mathfrak{P}$ mit $\bar{\mathfrak{a}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{b}}$. Bekanntlich gibt es in $\bar{\mathfrak{o}}$ zwei zueinander orthogonale idempotente Elemente e_1 und e_2 derart, dass

$$\bar{\mathfrak{o}}=e_1\bar{\mathfrak{o}}+e_2\bar{\mathfrak{o}}, \qquad \bar{\mathfrak{a}}=e_1\bar{\mathfrak{o}}.$$

Ist nun $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})=\mathfrak{o}$ gegen die Behauptung, so muss $(\bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{b}})=\bar{\mathfrak{o}}$ sein. Dann ist

$$e_2\bar{\mathfrak{o}}=(e_2\bar{\mathfrak{a}}, e_2\bar{\mathfrak{b}})=(e_2e_1\bar{\mathfrak{o}}, e_2\bar{\mathfrak{b}})=e_2\bar{\mathfrak{b}}\subseteqq\bar{\mathfrak{b}},$$

also

$$\bar{\mathfrak{o}}e_2\bar{\mathfrak{o}}\subseteqq\bar{\mathfrak{o}}\bar{\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{b}}.$$

Dies ist aber unmöglich. Denn nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ ist $\bar{\mathfrak{a}}\neq\bar{\mathfrak{o}}$, also $e_2\neq 0$ und muss das zweiseitige Ideal $\bar{\mathfrak{o}}e_2\bar{\mathfrak{o}}$ der einfachen

1) Ein Modul $\mathfrak{a}$ in A ist der Durchschnitt von A mit allen $\mathfrak{p}$-Komponenten von $\mathfrak{a}$. Dies beweist man ganz analog wie bei H. Hasse, a. a. O., Satz 66.

2) Die folgende Beweisanordnung verdanke ich K. Shoda; mein ursprünglicher Beweis war komplizierter.

Algebra $\bar{\mathfrak{o}}$ mit $\bar{\mathfrak{o}}$ selbst zusammenfallen, während andererseits $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ d. h. $\bar{\mathfrak{b}} \neq \bar{\mathfrak{o}}$ ist. Daher ist die erste Hälfte der Behauptung bewiesen.

Weiter sei π ein Primelement von $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P} = \pi\mathfrak{o} = \mathfrak{o}\pi$. Das Linksideal $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}, \mathfrak{P})^{-1}/\mathfrak{P}$ bzw. das Rechtsideal $\pi(\mathfrak{b}, \mathfrak{P})^{-1}\mathfrak{P}\pi^{-1}/\mathfrak{P} = \pi(\mathfrak{b}, \mathfrak{P})^{-1}/\mathfrak{P}$ von $\bar{\mathfrak{o}}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}'$ bzw. $\mathfrak{b}'$. Aus der Annahme $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ sieht man leicht, dass $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ beides von Null verschieden sind. Sei

$$\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{o}}e_1' + \bar{\mathfrak{o}}e_2', \qquad \mathfrak{a}' = \bar{\mathfrak{o}}e_1'$$

mit zueinander orthogonalen Idempotenten e_1' und e_2'.

Ist nun $\mathfrak{a}^{-1} \cap \mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{o}$, so ist um so mehr $(\mathfrak{a}, \mathfrak{P})^{-1} \cap (\mathfrak{b}, \mathfrak{P})^{-1} = \mathfrak{o}$. Also ist $\pi(\mathfrak{a}, \mathfrak{P})^{-1} \cap \pi(\mathfrak{b}, \mathfrak{P})^{-1} = \mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}' = 0$. Da aber $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}' \subseteqq \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$ ist, so ist dann $\mathfrak{b}'\mathfrak{a}' = 0$. Daher

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'(\bar{\mathfrak{o}}e_1' + \bar{\mathfrak{o}}e_2') = \mathfrak{b}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'\bar{\mathfrak{o}}e_2' = \mathfrak{b}'e_2',$$

also

$$\bar{\mathfrak{o}}e_2'\mathfrak{b}' = \bar{\mathfrak{o}}e_2'\mathfrak{b}'e_2' \subseteqq (\bar{\mathfrak{o}}e_2')^2 = \bar{\mathfrak{o}}e_2'.$$

Hier ist $\bar{\mathfrak{o}}e_2'\mathfrak{b}'$ ein zweiseitiges Ideal von $\bar{\mathfrak{o}}$, und von Null verschieden. Denn

$$\bar{\mathfrak{o}}e_2'\mathfrak{b}_1' \supseteqq \mathfrak{b}'e_2'\mathfrak{b}' = (\mathfrak{b}')^2 = \mathfrak{b}'.$$

Daher muss $\bar{\mathfrak{o}}e_2'\mathfrak{b}' = \bar{\mathfrak{o}}$ sein. Das widerspricht der obigen Ungleichung, da $\mathfrak{a}' = \bar{\mathfrak{o}}e_1' \neq 0$, also $\bar{\mathfrak{o}}e_2' \neq \bar{\mathfrak{o}}$ ist.

Also muss $\mathfrak{a}^{-1} \cap \mathfrak{b}^{-1} \neq \mathfrak{o}$ sein, und damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Hilfssatzes 2. Zuerst nehmen wir an, dass die Summe $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ von zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in A wieder ein Ideal in A ist, und dass gegen die Behauptung keine der Bedingungen 1), 2), 3) erfüllt ist. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ werden dann im Sinne der eigentlichen Multiplikation in den Formen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\mathfrak{t}_2; \qquad \mathfrak{s} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

geschrieben, wo $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ ganze Ideale in A sind.[1] Fallen dabei $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ (bzw. $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$) gleichzeitig mit der Linksordnung $\mathfrak{o}_L$ (bzw. Rechtsordnung $\mathfrak{o}_R$) von $\mathfrak{s}$ zusammen, so wird die Bedingung 2) (bzw. 3)) erfüllt. Ist weiter $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{o}_L$, $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{o}_R$ oder $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}_L$, $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{o}_R$, so gilt 1). Also nach unserer Annahme muss, wie man leicht sieht, mindestens einer der Fällen

$$\text{a)} \quad \mathfrak{r}_1 \neq \mathfrak{o}_L \text{ und } \mathfrak{t}_2 \neq \mathfrak{o}_R, \qquad \text{b)} \quad \mathfrak{r}_2 \neq \mathfrak{o}_L \text{ und } \mathfrak{t}_1 \neq \mathfrak{o}_R$$

auftreten. Z. B. sei a) erfüllt. Es gilt

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1, \mathfrak{r}_2\mathfrak{s}\mathfrak{t}_2) \subseteqq (\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}, \mathfrak{s}\mathfrak{t}_2),$$

also

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}, \mathfrak{s}\mathfrak{t}_2).$$

Setzt man $\mathfrak{s} = \mathfrak{o}_L s = s\mathfrak{o}_R$ mit einem Nichtnullteiler s aus A, so ist $\mathfrak{o}_L = s\mathfrak{o}_R s^{-1}$, und

$$\mathfrak{o}_L = \mathfrak{s}s^{-1} = (\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}s^{-1}, \mathfrak{s}\mathfrak{t}_2 s^{-1}) = (\mathfrak{r}_1, s\mathfrak{t}_2 s^{-1}).$$

Da aber $\mathfrak{r}_1$ bzw. $s\mathfrak{t}_2 s^{-1}$ nach unserer Annahme ein von $\mathfrak{o}_L$ verschiedenes ganzes Rechts- bzw. Linksideal von $\mathfrak{o}_L$ ist, so widerspricht dies dem

1) Vgl. etwa H. Hasse, a. a. O., Satz 52 oder M. Deuring, a. a. O., VI, § 2 Satz 16.

Hilfssatz 3. Im Fall b) kann man analog vorgehen. Also muss mindestens eine der Bedingungen 1), 2), 3) erfüllt sein, wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ Ideal ist. Die Umkehrung ist klar.

Wir betrachten nun den Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Wir nehmen wieder an, dass $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ein Ideal ist und gegen die Behauptung keine der Bedingungen 1), 2), 3) befriedigt ist. Im Sinne der eigentlichen Multiplikation ist dann

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{u}_2 \mathfrak{b} \mathfrak{w}_2$$

mit ganzen Idealen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}_2$ in A. Weiter ist analog wie oben

$$\text{a)} \quad \mathfrak{u}_1 \neq \mathfrak{o}_L \text{ und } \mathfrak{w}_2 \neq \mathfrak{o}_R \quad \text{oder} \quad \text{b)} \quad \mathfrak{u}_2 \neq \mathfrak{o}_L \text{ und } \mathfrak{w}_1 \neq \mathfrak{o}_R ,$$

wobei $\mathfrak{o}_L$ bzw. $\mathfrak{o}_R$ die Links- bzw. Rechtsordnung von $\mathfrak{d}$ bedeutet. Z. B. sei a) erfüllt. Es ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{u}_1^{-1} \mathfrak{d} \mathfrak{w}_1^{-1} \cap \mathfrak{u}_2^{-1} \mathfrak{d} \mathfrak{w}_2^{-1} \supseteqq \mathfrak{u}_1^{-1} \mathfrak{d} \cap \mathfrak{d} \mathfrak{w}_2^{-1}$, also

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{u}_1^{-1} \mathfrak{d} \cap \mathfrak{d} \mathfrak{w}_2^{-1} .$$

Setzt man $\mathfrak{d} = \mathfrak{o}_L v = v \mathfrak{o}_R$, so folgt

$$\mathfrak{o}_L = \mathfrak{u}_1^{-1} \cap v \mathfrak{w}_2^{-1} v^{-1} = \mathfrak{u}_1^{-1} \cap (v \mathfrak{w}_2 v^{-1})^{-1} .$$

Dies geht aber nicht, da das ganze Links- bzw. Rechtsideal $\mathfrak{u}_1$ bzw. $v \mathfrak{w}_2 v^{-1}$ nach unserer Annahme von $\mathfrak{o}_L$ verschieden ist. Der Fall b) führt auch analog zum Widerspruch. Daher gilt die zweite Behauptung des Hilfssatzes 2.

Hiermit ist Hilfssatz 2, und folglich unser Satz vollständig bewiesen.