109. *Klassenkörpertheorie im Grossen für unendliche algebraische Zahlkörper.*[1]

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Anschliessend an meine Untersuchung über die Klassenkörpertheorie im Kleinen für unendliche algebraische Zahlkörper[2] ist es mir neulich gelungen, über unendlichen algebraischen Zahlkörpern als Grundkörpern ein Analogon zur Klassenkörpertheorie im Grossen zu entwickeln. In der vorliegenden Note will ich darüber eine vorläufige Mitteilung geben.[3]

Zunächst betrachten wir alle derjenigen *archimedischen* Bewertungen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k, die jeder rationalen Zahl ihren absoluten Betrag als ihre Bewertung angeben, und ordnen einer solchen Bewertung von k wie üblich eine *unendliche Primstelle* $\mathfrak{p}_\infty$ zu.

Ist der Körper k der Vereinigungskörper einer Folge von Körpern endlichen Grades $k_1 \subset k_2 \subset \cdots\cdots \subset k_i \subset \cdots\cdots$, so induziert die $\mathfrak{p}_\infty$ entsprechende Bewertung von k in einem Körper k_i eine einzige archimedische Bewertung, welche ihrerseits einer unendlichen Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ von k_i entspricht.[4] Sind nun zwei Körper k_i, k_j aus der obigen Körperfolge herausgegriffen und $k_i \subset k_j$, so induziert die durch $\mathfrak{p}_\infty$ in k_j induzierte unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{j\infty}$ die unendliche Primstelle $\mathfrak{p}_{i\infty}$ von k_i. Also ist $\mathfrak{p}_\infty$ durch eine Folge der unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_{1\infty}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_{i\infty}, \cdots\cdots$ bestimmt: $\mathfrak{p}_\infty = \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{p}_{i\infty}$. Wenn zwei unendliche Primstellen $\mathfrak{p}_\infty = \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{p}_{i\infty}$ und $\mathfrak{q}_\infty = \lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{q}_{i\infty}$ gegeben sind, dann definiere ich $\frac{1}{i+1}$ als die *Entfernung* von $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{q}_\infty$, wenn $\mathfrak{p}_{1\infty} = \mathfrak{q}_{1\infty}$, $\mathfrak{p}_{2\infty} = \mathfrak{q}_{2\infty}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_{i\infty} = \mathfrak{q}_{i\infty}$, aber $\mathfrak{p}_{i+1\infty} \neq \mathfrak{q}_{i+1\infty}$ sind. Gibt es aber keine solche Zahl i, so setzen wir die Entfernung von $\mathfrak{p}_\infty$ und $\mathfrak{q}_\infty$ gleich Null. Die soeben definierten Entfernungen zwischen den unendlichen Primstellen erfüllen die Entfernungsaxiome, wie man sich leicht überzeugt.[5]

Mit Hilfe der oben eingeführten Entfernung kann man *konvergente Folgen* und *Fundamentalfolgen* der unendlichen Primstellen von k definieren.[6] Es zeigt sich dann, dass die Gesamtheit aller unendlichen Primstellen von k einen vollständigen Raum bildet.

---

1) Vor kurzem habe ich durch eine briefliche Mitteilung erfahren, dass Herr O. Schilling auch eine Begründung dieser Theorie gefunden hat. Seine Arbeit, welche in manchen Stellen und methodisch von der meinigen verschieden sind, erscheint demnächst in irgendeiner amerikanischen Zeitschrift.

2) Moriya, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, Journ. Science, Hokkaido, Vol. 5 (1936).

3) Eine ausführliche Darstellung dieser Note erscheint demnächst in Journ. Science, Hokkaido, Vol. 6.

4) Siehe etwa Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I bzw. Teil Ia, Jahresbericht d. D.-M.-V. Bd. XXXV bzw. Bd. XXXVI. Diese Arbeiten bezeichne ich mit H. I und H. Ia.

5) Siehe etwa Hausdorff, Mengenlehre, Berlin (1927), S. 94.

6) Hausdorff, loc. cit. S. 103.

Ist nun $\mathfrak{m}_0$ ein ganzes Ideal aus k und $\mathfrak{P}$ eine Menge von (endlich oder unendlich vielen) unendlichen Primstellen von k, so versteht man unter einem Idealmodul mit dem endlichen Bestandteil $\mathfrak{m}_0$ und unendlichen Bestandteil $\mathfrak{P}$ ein Symbol $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\mathfrak{P}$. Die Gleichheit, Teilbarkeit und grössten gemeinsamen Teiler der Idealmoduln definieren wir wie üblich. Ferner können wir die Kongruenz zwischen den Zahlen aus k nach einer unendlichen Primstelle von k wie gewöhnlich definieren.[1] Zwei Zahlen α, β ($\neq 0$) aus k heissen nach einem Idealmodul $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\mathfrak{P}$ einander kongruent, wenn

a) $$\frac{\alpha}{\beta}\equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0,$$

b) $$\frac{\alpha}{\beta}\equiv 1 \mod \mathfrak{p}_\infty$$

sind, wobei $\mathfrak{m}_0$ den endlichen Bestandteil von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ eine beliebige in $\mathfrak{P}$ aufgehende unendliche Primstelle von k bedeutet.

Nun betrachten wir alle *umkehrbaren Ideale*[2] aus k, d. h. alle solchen Ideale, welche ihre Reziproken besitzen. Dann bilden sie eine multiplikative abelsche Gruppe A und enthalten alle vom Nullideale verschiedenen Hauptideale aus k als eine Untergruppe. Unter allen Hauptidealen bilden diejenigen, die von den Zahlen $\alpha\equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}$ ist ein Idealmodul in k) erzeugt sind, den *Strahl* mod $\mathfrak{m}$. Im folgenden bezeichne ich mit $A^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale aus A. Eine Untergruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ von $A^{(\mathfrak{m})}$, welche den Strahl mod $\mathfrak{m}$ enthält, heisse eine mod $\mathfrak{m}$ *erklärte Idealgruppe* in k. Die Gleichheit der Idealgruppen, welche nach verschiedenen Idealmoduln erklärt sind, kann man wie gewöhnlich definieren.[3]

Wir betrachten jetzt über k einen endlichen algebraischen Erweiterungskörper K und greifen aus k einen beliebigen Idealmodul $\mathfrak{m}$ heraus. Dann bildet die Gesamtheit $H^{(\mathfrak{m})}$ aller derjenigen Strahlklassen mod $\mathfrak{m}$ in k, in die mindestens die Norm eines zu $\mathfrak{m}$ primen umkehrbaren Ideals aus K eintritt, eine Untergruppe von $A^{(\mathfrak{m})}$, welche die mod $\mathfrak{m}$ *K zugeordnete Idealgruppe* genannt wird. Es gilt dann: *Der Index von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach $H^{(\mathfrak{m})}$ ist ein Teiler von $[K:k]$.*

Ist $\mathfrak{m}'$ ein durch $\mathfrak{m}$ teilbarer Idealmodul in k und $H^{(\mathfrak{m}')}$ die mod $\mathfrak{m}'$ K zugeordnete Idealgruppe in k, so gilt folgende Relation:

$$[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}] \mid [A^{(\mathfrak{m}')}:H^{(\mathfrak{m}')}].$$

Es gibt also stets einen Idealmodul $\mathfrak{n}$ und die mod $\mathfrak{n}$ K zugeordnete Idealgruppe $H^{(\mathfrak{n})}$ derart, dass $[A^{(\mathfrak{n})}:H^{(\mathfrak{n})}]$ den maximalen Index h angibt. Die nach verschiedenen Idealmoduln K zugeordneten Idealgruppen in k, welche den Index h besitzen, sind einander gleich. Wir nennen diese einander gleichen Idealgruppen vom Index h kurz die *K zugeordnete Idealgruppe in k.*

---

1) H. Ia, S. 60.

2) Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, II, Math. Zeitschr., Bd. 31 (1930), S. 553–557.

3) H. I, S. 6–7.

Nun definiere ich Klassenkörper folgendermassen: *Ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper K über k heisse Klassenkörper, wenn* $[A:H]$[1]$=[K:k]$ *ist, wobei H die K zugeordnete Idealgruppe in k bezeichnet.*

Damit ein endlicher Erweiterungskörper K über k Klassenkörper sei, ist hinreichend und notwendig, dass *K über k abelsch und $[K:k]$ zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist.* In unserer Theorie können also im allgemeinen die Körper existieren, welche über k abelsch, aber kein Klassenkörper sind. Dies ist aber ein grosser Unterschied von der bisher bekannten Klassenkörpertheorie im Grossen. Wenn man aber darauf achtet, dass für endliche algebraische Zahlkörper die unendlichen Bestandteile der absoluten Grade stets gleich 1 sind, dann wird man sich darüber klar, warum der sogenannte *Umkehrsatz*[2] für endliche algebraische Zahlkörper als Grundkörper gilt.

Für Klassenkörper kann man aber wie in der Klassenkörpertheorie im grossen den *Isomorphie-*, *Anordnungs-*, *Eindeutigkeits-*, *und Verschiebungssatz* beweisen. Zum Existenzsatz muss man aber eine spezielle Klasse der Idealgruppen heranziehen, welche ich K-Gruppen nennen will. Und zwar heisst eine Idealgruppe H in k eine *K-Gruppe*, wenn es in k einen Teilkörper k_* von endlichem absolutem Grade mit folgender Eigenschaft gibt: Es existiert ein Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H derart, dass für die mod $\mathfrak{m}$ erklärte Idealgruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ von H der Durchschnitt[3] $H_\nu^{(\mathfrak{m})}$ von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit einen beliebigen enlichen, k_* enthaltenden Teilkörper k_ν von k gleich ist zu der aus allen derjenigen zu $\mathfrak{m}_*$ primen Ideale in k_ν bestehenden Idealgruppe, deren Normen nach k_* zu $H^{(\mathfrak{m})} \cap k_*$ gehören. Dabei bedeutet aber $\mathfrak{m}_*$ denjenigen Idealmodul in k_*, welcher aus dem Durchschnitt des endlichen Bestandteiles von $\mathfrak{m}$ mit k_* und allen durch die in $\mathfrak{m}$ aufgehenden unendlichen Primstellen induzierten unendlichen Primstellen von k_* besteht. Es gilt dann:

Zu jeder K-Gruppe H von endlichem Index in A existiert stets ein H zugeordneter Klassenkörper über k.

---

1) Wir verstehen unter dieser abgekürzten Bezeichnung folgendes: Wir greifen aus k einen Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H heraus, und setzen $[A:H]=[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}]$, weil $[A^{(\mathfrak{m})}:H^{(\mathfrak{m})}]$ von der Wahl des Erklärungsmoduls $\mathfrak{m}$ von H unabhängig ist. Vgl. H. I, S. 8.

2) H. I, S. 10.

3) $H_\nu^{(\mathfrak{m})}$ bedeutet die Gesamtheit derjenigen Ideale aus k_ν, deren Erwiterungsideale in k zu $H^{(\mathfrak{m})}$ gehören.