51. Rein arithmetisch-algebraischer Aufbau der Klassenkörpertheorie über algebraischen Funktionenkörpern in einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper.

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut der Hokkaido Kaiserlichen Universität zu Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1937.)

Über algebraischen Funktionenkörpern einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper ist ein Analogon zur Klassenkörpertheorie von F. K. Schmidt,[1] Hasse,[2] Witt[3] u. a. entwickelt worden. In dem bisherigen Aufbau dieser Theorie muss man doch an einigen Stellen analytische Hilfsmitteln, d. h. die Kongruenzzeta- und L-Funktionen verwenden. Um aber die ganze Theorie rein arithmetisch-algebraisch aufzubauen braucht man nur noch folgenden Satz ohne Hilfe der Analysis zu beweisen[4]:

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper und Z eine separable zyklische Erweiterung von K. Dann gibt es in K einen Divisor, dessen Artinsymbol vom Einheitselement der galoisschen Gruppe von Z/K verschieden ist.

Mit derselben Überlegung wie bei Chevalley und Nehrkorn[5] kann man den oben angegebenen Satz auf folgenden Satz zurückführen, dessen Beweis ich in dieser Note skizzieren will[6]:

Satz. *Es sei Z ein unverzweigter, separabler zyklischer Körper vom Primzahlgrade l über K. Ferner enthalte K primitive l-te Einheitswurzeln, wenn l von der Körpercharakteristik verschieden ist. Dann gibt es in K mindestens einen Primdivisor, welcher in Z nicht zerfällt.*

Zum Beweis bedienen wir uns folgender Bezeichnungen:

σ Ein erzeugender Automorphismus von Z/K.

η^* bzw. η Die Gruppe derjenigen Einheiten aus K (d. h. Elemente aus dem Konstantenkörper von K), welche Relativnormen der Elemente bzw. Einheiten aus Z sind.

---

1) F. K. Schmidt, Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Konstentenbereich, Sitzungsbericht d. phy.-med. Sozietät zu Erlangen, **62** (1930), 267–284.

2) Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, Journ. f. d. r. u. a. Math., **172** (1934), 37–54.

3) Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, Journ. f. d. r. u. a. Math., **173** (1935), 43–51.

4) Hasse, loc. cit. Dort muss man zwei Sätze, bezeichnet mit a) und b), beweisen. Der mit b) bezeichnete Satz wird aber nach einem Gedanken von Chevalley und Nehrkorn rein arithmetisch bewiesen, weil man nach Witt (Witt, loc. cit.) zu einer beliebigen Divisorengruppe endlichen Index den ihr zugeordneten Klassenkörper bilden kann. Vgl. Chevalley und Nehrkorn, Sur les démonstrations arithmétiques dans la théorie du corps de classes, Math. Ann., **111** (1935), 364–371.

5) Chevalley und Nehrkorn, loc. cit., 366–367. In unserem Fall treten aber geringe Modifikationen ein, weil die Körpercharakteristik eine Primzahl ist.

6) Eine ausführliche Darstellung der ganzen Theorie erscheint demnächst an anderer Stelle.

ε bzw. $\bar{\varepsilon}$ Die Gruppe der Einheiten aus K bzw. Z.
$\bar{\eta}$ Die Gruppe derjenigen Einheiten aus Z, deren Relativnormen nach K gleich 1 sind.
$\bar{A}_0$ bzw. A Die Divisorengruppe 0-ten Grades in Z bzw. K.
$\bar{\bar{H}}_1$ Die Gruppe derjenigen Divisorenklassen aus Z, welche symbolische $(1-\sigma)$-te Potenz eines Divisors enthalten. ($\bar{\bar{H}}_1$ ist also eine Untergruppe von $\bar{A}_0$).
H_0 Die Hauptdivisorenklasse in K.

Beweis des Satzes. Wir wollen annehmen, dass es in K keine Primdivisoren gibt, welche in Z nicht zerfallen. Da nach Voraussetzung Z über K unverzweigt ist, so müssen alle Primdivisoren aus K in Z vollzerfallen. Also ist jeder Divisor aus K Relativnorm eines Divisors aus Z. Hieraus schliesst man nach F. K. Schmidt einerseits

$$(1) \qquad [\bar{A}_0 : \bar{\bar{H}}_1] = \frac{h_0}{la^*} \frac{[\eta^* : \eta]}{[\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}]}, \text{[1]}$$

wobei a^* eine durch K und Z eindeutig bestimmte natürliche Zahl bedeutet,[2] und anderseits

$$(2) \qquad [\bar{A}_0 : \bar{\bar{H}}_1] \geqq [A_0 : H_0] = h_0 .$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

I) Z entsteht aus K durch Erweiterung des Konstantenkörpers.

Man beweist dann leicht, dass $\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}$[3] und $\eta^* = \eta$ sind. Hieraus folgt nach (1)

$$[\bar{A}_0 : \bar{\bar{H}}_1] = \frac{h_0}{la^*} < h_0 ,$$

was aber mit (2) im Widerspruch steht.

II) In Z erfährt der Konstantenkörper keine Erweiterung.

a) l ist nicht gleich der Körpercharakteristik.

In diesem Fall ist offenbar $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$ und infolgedessen $N_{ZK}(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon^l$. Ferner ist $\eta = \varepsilon^l$ und $[\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}] = l$. Daher folgt aus (1) und (2)

$$h_0 \leqq [\bar{A}_0 : \bar{\bar{H}}_1] = \frac{h_0}{la^*} \frac{[\eta^* : \eta]}{l} \leqq \frac{h_0}{la^*} ,$$

weil $[\eta^* : \eta] \leqq l$ ist. Dies ist aber Widerspruch.

b) l ist gleich der Körpercharakteristik.

Offenbar ist in diesem Fall $\bar{\eta} = 1$ und infolgendessen $[\bar{\eta} : \bar{\varepsilon}^{1-\sigma}] = 1$.

---

1) F. K. Schmidt, loc. cit., S. 279–281. Diese Formel gilt auch im Falle, wo l der Körpercharakteristik gleich ist.

2) Wenn man die Tatsache benutzt, das es in Z einen Divisor 1-ten Grades gibt, so wird $a^* = 1$. Ich vermeide aber diese Tatsache zu benutzen, weil man, soweit ich weiss, zum Beweis die Kongruenzzetafunktionen zu Hilfe nehmen muss.

3) Zum Beweis muss man eine Verallgemeinerung eines bekannten Hilbertschen Satzes benutzen (Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht d. D. M. V., **4** (1897), 175–546. Satz 90.) Vgl. Noether, Der Hauptgeschlechtssatz für relativ-galoissche Zahlkörper, Math. Ann., **108** (1933), 411–419.

Da aber als Gruppe $\varepsilon^l = \varepsilon$ ist, so ist jede Einheit aus K Norm einer Einheit aus Z. Hieraus folgt nach (1) und (2)

$$\frac{h_0}{la^*} \geqq h_0,$$

was aber Widerspruch ist.

Auf jeden Fall führt die am Anfang aufgestellt Annahme zu Widerspruch. Es muss also mindestens einen Primdivisor aus K geben, welcher in Z nicht zerfällt.