91. Sur les classes des constituantes des ensembles complémentaires analytiques.

Par Takeshi INAGAKI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1937.)

Soit C un ensemble du plan $\mathfrak{J}_{xy}$. Nous disons qu'un ensemble de points situés sur une droite parallèle à l'axe $\mathfrak{J}_y$ jouit de la propriété $P_a(0 \leqq a < \Omega)$ lorsqu'il est un ensemble bien ordonné du type a suivant la direction positive de l'axe $\mathfrak{J}_y$. Désignons par $\mathfrak{E}_a = \mathfrak{E}_a(C)$ l'ensemble de tous les points x_0 situés sur l'axe $\mathfrak{J}_x$, tels que l'ensemble (linéaire) de tous les points communs à C et à la droite $x=x_0$ jouit de la propriété P_a et l'appelons, d'après M. N. Lusin,[1] la constituante d'ordre a du complémentaire de l'ensemble criblé au moyen du *crible* C. De plus, désignons par $\mathfrak{E}_\Omega$ l'ensemble de tous les points x_0 situés sur l'axe $\mathfrak{J}_x$, tels que l'ensemble (linéaire) de tous les points communs à C et à la droite $x=x_0$ n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe $\mathfrak{J}_y$.

Soit $\mathfrak{C}$ une famille donnée des ensembles plans. Désignons par $\Phi(a)$ la famille de tous les ensembles $\mathfrak{E}_a(C)$, où C est un crible (variable) de la famille $\mathfrak{C}$.

Pour le cas où $\mathfrak{C}$ est la famille de tous les ensembles plans fermés, M. W. Sierpiński[2] a proposé d'étudier la famille $\Phi(a)$, et demandé en particulier si l'on a toujours $\Phi(a) \subseteqq \Phi(\beta)$ pour $a < \beta$.

Or, dans cette Note, nous traiterons le cas où $\mathfrak{C}$ est la famille de tous les ensembles plans composés d'une infinité dénombrables d'ensembles fermés situés sur des droites parallèles à l'axe $\mathfrak{J}_x$, et y établissons la monotonie de $\Phi(a)$, c.-à-d. qu'on a toujours $\Phi(a) \subseteqq \Phi(\beta)$, pour $a < \beta$.

Tout d'abord, nous faisons quelques remarques préliminaires:

1° Nous supposons toujours que l'ordonnée de chaque point des cribles est un nombre irrationnel entre 0 et 1—ce qui est possible sans perdre la généralité du raisonnement.

2° $r_1, r_2 (r_1 < r_2)$ étant deux nombres rationnels dans l'axe $\mathfrak{J}_y$, désignons par $C^{(r_1, r_2)}$ le sous-ensemble des points du crible C tels que ses ordonnées sont des nombres irrationnels entre l'intervalle (r_1, r_2), et désignons par $\mathfrak{E}_a^{(r_1, r_2)}$ la constituante d'ordre a par rapport au crible $C^{(r_1, r_2)}$.

3° Nous écrivons par $\mathfrak{J}_x(a)$ un crible du type a[3] qui est composé des *droites* parallèles à l'axe $\mathfrak{J}_x$.

4° Soient C et C' deux cribles. Désignons par N_C et $N_{C'}$ les projections sur l'axe $\mathfrak{J}_y$ de C et C' respectivement. Comme nous avons supposé, N_C et $N_{C'}$ sont dénombrables. Nous disons que C et C' sont

1) Cf. N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, Gauthier-Villars. 1930. p. 188.

2) Cf. W. Sierpiński: Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points. Mathematica. Vol. 5. 1931. p. 53.

3) Cf. N. Lusin: Sur les ensembles analytiques nuls. Fund. Math. t. 25 (1935). pp. 109–110.

équivalents, si les ensembles N_C, $N_{C'}$, C et C' satisfont aux conditions suivantes :

a) Nous pouvons ranger les éléments de N_C ainsi que ceux de $N_{C'}$ en deux suites ; $(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots)$ et $(y'_1, y'_2, \cdots\cdots, y'_n, \cdots\cdots)$ de façon que l'inégalité $y_i < y_j$ équivale à $y'_i < y'_j$, ce qui signifie que les ensembles N_C et $N_{C'}$ sont semblables.

b) La projection sur l'axe $\mathfrak{J}_x$ de la partie de C située sur la droite $y=y_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ est identique à celle de la partie de C' située sur la droite $y=y'_i$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots)$.

Cela posé, C_β $(0 \leqq \beta < \alpha)$ étant un crible, nous désignons par $\sum^*_{0\leqq\beta<\alpha} C_\beta$ (ou bien par $C_0 \overset{*}{+} C_1 \overset{*}{+} \cdots\cdots \overset{*}{+} C_\beta \overset{*}{+} \cdots\cdots | \alpha)$ un crible de la réunion des cribles C^*_β, qui sont équivalents à C_β, mais situés dans l'ordre de β, c.-à-d. pour tous les nombres β et β' $(\beta > \beta')$, C^*_β est situé au-dessus de $C^*_{\beta'}$.

5° Soit $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles fermés situés sur l'axe $\mathfrak{J}_x$. Posons $\mathfrak{F}^0_\delta = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^1_\sigma = (\mathfrak{F}^0_\delta)_\sigma$ et $\mathfrak{F}^2_\delta = (\mathfrak{F}^1_\sigma)_\delta$. Supposons qu'on définit $\mathfrak{F}^{2\beta}_\delta$ et $\mathfrak{F}^{2\beta+1}_\sigma$ pour tous les β inférieurs à α $(1 \leqq \alpha < \Omega)$ et définissons $\mathfrak{F}^{2\alpha}_\delta$ et $\mathfrak{F}^{2\alpha+1}_\sigma$ respectivement comme il suit : $\mathfrak{F}^{2\alpha}_\delta = (\sum_{0\leqq\beta<\alpha} \mathfrak{F}^{2\beta+1}_\sigma)_\delta$ et $\mathfrak{F}^{2\alpha+1}_\sigma = (\mathfrak{F}^{2\alpha}_\delta)_\sigma$.

Cela posé, désignons par $\mathfrak{G}^{2\alpha}_\sigma$ et par $\mathfrak{G}^{2\alpha+1}_\delta$ les familles des ensembles complémentaires par rapport à l'axe $\mathfrak{J}_x$ des ensembles appartenants à $\mathfrak{F}^{2\alpha}_\delta$ et à $\mathfrak{F}^{2\alpha+1}_\sigma$ respectivement.

Enfin, dans cette Note, nous nous appuierons plusieurs fois sur le théorème suivant que nous avons établi dans un autre travail :[1]

Théorème (0). Tout ensemble $\mathfrak{F}^{2\gamma}_\delta$ *situé sur l'axe* $\mathfrak{J}_x$ *peut être considéré comme la constituante supérieure*[2] *d'un crible bien ordonné du type* ω^γ *(d'ensemble appartenant à* $\mathfrak{C}$*). Inversement, la constituante supérieure d'un crible (d'ensemble appartenant à* $\mathfrak{C}$*) bien ordonné du type* ω^γ *est un ensemble* $\mathfrak{F}^{2\gamma}_\delta$.

La première partie du théorème signifie le fait suivant : $\mathfrak{F}^{2\gamma}_\delta$ étant un ensemble situé sur l'axe $\mathfrak{J}_x$, il y a, dans la famille $\mathfrak{C}$, un crible bien ordonné du type ω^γ qui donne un développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en une série transfinie des constituantes telle que

$$\mathfrak{J}_x = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \cdots\cdots + \mathscr{E}_\beta + \cdots\cdots + \mathscr{E}_{\omega^\gamma} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_{\omega^\gamma} = \mathfrak{F}^{2\gamma}_\delta .$$

(1) Évaluation de la classe des constituantes.

Théorème 1. Les constituantes $\mathscr{E}_{\omega^\gamma}$ *et* $\mathscr{E}_\alpha$ $(\omega^\gamma < \alpha < \omega^{\gamma+1})$ *sont des ensembles* $\mathfrak{G}^{2\gamma+1}_\delta$ *et* $\mathfrak{G}^{2(\gamma+1)}_\sigma$ *respectivement.*

Démonstration. On sait bien que $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ et $\mathscr{E}_\omega$ sont d'ensembles $\mathfrak{G}^1_\delta$, $\mathfrak{G}^1_\delta \cdot \mathfrak{F}^1_\sigma$ et $\mathfrak{G}^3_\delta$ respectivement. Donc, la proposition proposée est vraie pour $\gamma=0$. Supposons la proposition vraie pour tout nombre transfini γ' inférieur à γ et montrons qu'elle est vraie pour γ lui-même.

Tout d'abord considérons le crible dérivé $C^{(\omega^\gamma)}$ d'ordre ω^γ au sens

1) Voir notre article "Sur les ensembles analytiques nuls" qui paraîtra prochainement dans "The Journal of the Faculty of Science," Hokkaido Imperial Uuiversity. Series 1. Vol. 6. No. 4.

2) Cf. Lusin. loc. cit., p. 109.

de M. Lusin.[1] D'après l'hypothèse, toutes les constituantes $\mathscr{E}_\beta$, $0 \leqq \beta < \omega^\gamma$, sont des ensembles $\mathfrak{G}_\sigma^{2\gamma}$. Ensuite, prenons un nombre rationnel r dans l'axe $\mathfrak{J}_y$ et considérons la partie $C^{(0,r)}$ du crible C. Posons $C(r) = C - C^{(0,r)} \cdot \{(\sum_{0 \leq \beta < \omega^\gamma} \mathscr{E}_\beta^{(0,r)}) \times \mathfrak{J}_y\}$. $C(r)$ est alors un ensemble plan $\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma}$. Nous pouvons sans peine vérifier que $C^{(\omega^\gamma)} = \prod_r C(r)$ où r parcourt l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. $C^{(\omega^\gamma)}$ est donc un ensemble plan $\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma}$ et, par suite, il vient $\mathscr{E}_{\omega^\gamma} = \mathfrak{J}_x - (\sum_{0 \leq \beta < \omega^\gamma} \mathscr{E}_\beta + \operatorname{Proj}_{\mathfrak{J}_x} C^{(\omega^\gamma)})$. $\mathscr{E}_{\omega^\gamma}$ est donc un ensemble $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$.

Puis, α étant un nombre transfini tel que $\omega^\gamma < \alpha < \omega^{\gamma+1}$, on peut poser $\alpha = \omega^\gamma + \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_k}$ où $\gamma \geqq \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \gamma_k \geqq 0$. La constituante $\mathscr{E}_\alpha$ sera donc donnée en symboles logiques par $[x \in \mathscr{E}_\alpha] \equiv \sum_{r_1 < r_2 < \cdots < r_k} (x \in \mathscr{E}_{\omega^\gamma}^{(0, r_1)}) \cdot (x \in \mathscr{E}_{\omega^{\gamma_1}}^{(r_1, r_2)}) \cdots\cdots (x \in \mathscr{E}_{\omega^{\gamma_k}}^{(r_k, 1)})$, où $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$ parcourent l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. Comme on peut vérifier, $\mathscr{E}_\alpha$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2(\gamma+1)}$. c. q. f. d.

(2) Détermination de la classe d'ensembles des familles $\Phi(\omega^\gamma)$.

Théorème 2. Les familles $\Phi(\omega^\gamma)$ coïncident avec les familles $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$.

Démonstration. Soit M un ensemble appartenant à $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$ dans l'axe $\mathfrak{J}_x$. L'ensemble complémentaire par rapport à l'axe $\mathfrak{J}_x$ de M est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma+1}$. On peut supposer que $\mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma})_n$, où $(\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma})_n \leqq (\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma})_{n+1}$ pour tout nombre naturel n. D'après le théorème (0), chaque ensemble $(\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma})_n$ peut être considéré comme la constituante supérieure d'un crible C_n qui est bien ordonné du type ω^γ. Nous avons deux cas à distinguer :

Premier cas où γ est de première espèce, soit $\gamma = \gamma' + 1$. Posons $C'_n = \mathfrak{J}_x(\omega^{\gamma'}) \overset{*}{+} C_n$ et considérons un crible $\overline{C} = \sum_{n=1}^{\infty}{}^* C'_n$. On peut vérifier que le crible $\overline{C}$ donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en série de deux constituantes tel que $\mathfrak{J}_x = \overline{\mathscr{E}}_{\omega^\gamma} + \overline{\mathscr{E}}_{\omega^{\gamma+1}}$ et $\overline{\mathscr{E}}_{\omega^{\gamma+1}} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma+1}$. Il vient $M = \overline{\mathscr{E}}_{\omega^\gamma}$.

Deuxième cas où γ est de deuxième espèce, soit $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots\cdots < \gamma_n < \cdots\cdots$ et $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$. Il nous suffit, dans le raisonnement donné plus haut, de remplacer le crible $\mathfrak{J}_x(\omega^{\gamma'}) \overset{*}{+} C_n$ par un crible $\mathfrak{J}_x(\omega^{\gamma_n}) \overset{*}{+} C_n$. c. q. f. d.

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 2, nous avons vu le fait suivant: à chaque ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma+1}$ sur l'axe $\mathfrak{J}_x$ il y a un crible C appartenant à la famille $\mathfrak{C}$ et qui donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en deux constituantes tel que $\mathfrak{J}_x = \mathscr{E}_{\omega^\gamma} + \mathscr{E}_{\omega^{\gamma+1}}$ et $\mathscr{E}_{\omega^{\gamma+1}} = \mathfrak{F}_\sigma^{2\gamma+1}$.

(3) *Théorème 3. Les familles $\Phi(\alpha)$ sont monotones, c.-à-d. on a toujours $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\beta)$ pour $\alpha < \beta$.*

Démonstration. Lemme 1. $\Phi(0) \leqq \Phi(\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

En effet, prenons un crible $\overline{C} = \mathfrak{J}_x(\alpha) \overset{*}{+} C$. Il est alors évident que $\mathscr{E}_0(C) = \overline{\mathscr{E}}_\alpha(\overline{C})$. Par suite, il vient $\Phi(0) \leqq \Phi(\alpha)$. c. q. f. d.

Lemme 2. $\Phi(n) \leqq \Phi(\alpha)$ pour tout $\alpha > n$.

1) Cf. N. Lusin. Leçons sur les ensembles analytiques... pp. 189-190.

Prenons d'abord le crible dérivé $C^{(n)}$ d'ordre n du crible C donné au sens de M. Lusin. Posons $C_\xi = C^{(n)}$ pour tout ξ tel que $0 \leqq \xi < \alpha$. Considérons un crible $C' = \sum^*_{0 \leq \xi < \alpha} C_\xi$. Prenons $C'' = C^{(n-1)} \overset{*}{+} C'$, où $C^{(n-1)}$ est le crible dérivé d'ordre $n-1$ du cribe C donné, et posons en outre $C''_\xi = C''$, $0 \leqq \xi < \alpha$. Cela posé, considérons un crible $\overline{C} = \sum^*_{0 \leq \xi < \alpha} C''_\xi$. Alors nous avons $\mathcal{E}_n(C) = \overline{\mathcal{E}}_\alpha(\overline{C})$. c. q. f. d.

Lemme 3. $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\alpha + n)$ pour tout α, où n est un nombre naturel.

Il suffit de considérer le crible $\overline{C} = C \overset{*}{+} \mathfrak{J}_x(n)$, pour lequel nous avons $\mathcal{E}_\alpha(C) = \overline{\mathcal{E}}_{\alpha+n}(\overline{C})$. c. q. f. d.

Lemm 4. γ ét $\bar{\gamma}$ soient deux nombres transfinis de seconde classe (ou fini) tels que $\gamma < \bar{\gamma}$. Si $\omega^\gamma \leqq \alpha < \omega^{\gamma+1}$ et si $\omega^{\bar{\gamma}} \leqq \beta > \omega^{\bar{\gamma}+1}$, on a toujours $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\beta)$.

D'après le théorème 1, la constituante $\mathcal{E}_\alpha$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2(\gamma+1)}$. Par suite $\mathcal{E}_\alpha$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}}$. Il est évident que l'ensemble complémentaire par rapport à l'axe $\mathfrak{J}_x$ de $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}}$ est un ensemble $\mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}}$. D'après le théorème (0), dans la famille $\mathfrak{C}$ il y a un crible C' du type $\omega^{\bar{\gamma}}$ et qui donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en une série transfinie des constituantes telle que $\mathfrak{J}_x = \mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_1 + \cdots\cdots + \mathcal{E}'_\xi + \cdots\cdots + \mathcal{E}'_{\omega^{\bar{\gamma}}}$ où $\xi < \omega^{\bar{\gamma}}$ et $\mathcal{E}'_{\omega^{\bar{\gamma}}} = \mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}}$. Prenons un crible $\overline{C} = C' \overset{*}{+} \mathfrak{J}_x(\beta)$. Alors le crible $\overline{C}$ donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en deux constituantes: $\mathfrak{J}_x = \overline{\mathcal{E}}_\beta + \overline{\mathcal{E}}_{\omega^{\bar{\gamma}}+\beta}$ où $\mathcal{E}_\alpha = \overline{\mathcal{E}}_\beta$ et $\mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}} = \overline{\mathcal{E}}_{\omega^{\bar{\gamma}}+\beta}$. Il est évident que $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\beta)$. c. q. f. d.

Lemme 5. Soient α, β et γ trois nombres transfinis de seconde classe (ou fini) tels que $\omega^\gamma \leqq \alpha < \beta < \omega^{\gamma+1}$. Posons $\alpha = \omega^\gamma + \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_{i-1}} + \omega^{\gamma_i} + \omega^{\gamma_{i+1}} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_k}$ et $\beta = \omega^\gamma + \omega^{\gamma_1} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_{i-1}} + \omega^{\bar{\gamma}_i} + \omega^{\bar{\gamma}_{i+1}} + \cdots\cdots + \omega^{\bar{\gamma}_l}$, où nous supposons que: $\gamma \geqq \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \gamma_{i-1} \geqq \bar{\gamma}_i > \gamma_i \geqq \gamma_{i+1} \geqq \cdots\cdots \geqq \gamma_k \geqq 0$, $\bar{\gamma}_i \geqq \bar{\gamma}_{i+1} \geqq \cdots\cdots \geqq \bar{\gamma}_l \geqq 0$ et $\bar{\gamma}_i \geqq 1$. Alors nous avons $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\alpha + \omega^{\bar{\gamma}_i})$.

Tout d'abord, pour la simplicité, posons $\alpha' = \omega^\gamma + \omega^{\gamma_1} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_{i-1}}$ et $\alpha'' = \omega^{\gamma_i} + \omega^{\gamma_{i+1}} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_k}$. Soit ξ un nombre transfini tel que: (*) $\xi + \omega^{\bar{\gamma}_i} = \alpha + \omega^{\bar{\gamma}_i}$. Alors ξ peut être écrit sous la forme $\xi = \alpha' + \Delta$ où $0 \leqq \Delta < \omega^{\bar{\gamma}_i}$. Si $\xi \neq \alpha$, il existe deux cas à distinguer: Cas 1. $0 \leqq \Delta < \alpha''$, Cas 2. $\alpha'' < \Delta < \omega^{\bar{\gamma}_i}$.

Premier cas où $0 \leqq \Delta < \alpha''$. Considérons un ensemble M_1 donné en symboles logiques par

$$[x \in M_1] \equiv \sum_r \Big[\big(x \in \sum_{0 \leq \mu < \alpha''} \mathcal{E}_\mu^{(r,1)}\big) \cdot \prod_{r' < r} \Big\{ \big(x \in \operatorname*{Proj.}_{\mathfrak{J}_x} C^{(r',r)}\big) \rightarrow \big(x \in \sum_{\omega^{\bar{\gamma}_i} \leq \mu \leq \Omega} \mathcal{E}_\mu^{(r',r)}\big) \Big\} \Big],$$

où r, r' parcourent l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. D'après théorème 1, $\sum_{0 \leq \mu < \alpha''} \mathcal{E}_\mu^{(r,1)}$ et $\sum_{\omega^{\bar{\gamma}_i} \leq \mu \leq \Omega} \mathcal{E}_\mu^{(r',r)}$ sont $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}_i}$ et $\mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}_i}$ respectivement, et $\operatorname*{Proj.}_{\mathfrak{J}_x} C^{(r',r)}$ est un $\mathfrak{F}_\sigma^1$. Donc M_1 est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\bar{\gamma}_i+1}$. De plus, comme on peut facilement vérifier, M_1 satisfait à deux relations: $\mathcal{E}_\alpha \cdot M_1 = 0$ et $M_1 \supset \mathcal{E}_\xi$ où $\xi = \alpha' + \Delta$.

Deuxième cas où $\alpha'' < \Delta < \omega^{\bar{\gamma}_i}$. Considérons un ensemble M_2 donné en symboles logiques par

$$[x \in M_2] \equiv \sum_r \Big[x \in \big(\sum_{\alpha'' < \mu < \omega^{\bar{\gamma}} i} \mathcal{E}_\mu^{(r,1)} \big) \Big],$$

où r parcourt l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. D'après le théorème 1, $\sum_{\alpha'' < \mu < \omega^{\bar{\gamma}} i} \mathcal{E}_\mu^{(r,1)}$ est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}} i$. M_2 est donc un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}} i$. Comme on peut sans peine voir, M_2 satisfait à deux conditions: $\mathcal{E}_\alpha \cdot M_2 = 0$ et $M_2 \supset \mathcal{E}_\xi$ où $\xi = \alpha' + \varDelta$.

Considérons maintenant l'ensemble $M = M_1 + M_2$. Il est important de remarquer que M contient toutes les constituantes $\mathcal{E}_\xi$ dont le suffixe ξ remplit la relation (*) et $\xi \neq \alpha$. Comme M est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma^{2\bar{\gamma}} i+1$, d'après la remarque 1, il y a, dans la famille $\mathfrak{C}$, un crible C' qui donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en deux constituantes: $\mathfrak{J}_x = \mathcal{E}'_{\omega^{\bar{\gamma}} i} + \mathcal{E}'_{\omega^{\bar{\gamma}} i+1}$ et $\mathcal{E}'_{\omega^{\bar{\gamma}} i+1} = M$. Si nous considérons un crible $\overline{C} = C \overset{*}{+} C'$, comme nous pouvons sans peine voir, l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha(C)$ coïncide avec la constituante $\overline{\mathcal{E}}_{\alpha + \omega^{\bar{\gamma}} i}(\overline{C})$. Nous avons donc $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\alpha + \omega^{\bar{\gamma}} i)$. c. q. f. d.

Lemme 6. $\Phi(\omega^\gamma \cdot \alpha) \leqq \Phi\big(\omega^\gamma(\alpha + k)\big)$ où $\gamma \geqq 1$ et k est un nombre naturel.

Considérons d'abord l'ensemble $\sum_r [\sum_{0 < \beta < \omega^\gamma} \mathcal{E}_\beta^{(r,1)}]$ où r parcourt l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. D'après le théorème 1, cet ensemble est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\gamma}$. En vertu de la propriété de la construction de cet ensemble, l'ensemble complémentaire par rapport à l'axe $\mathfrak{J}_x$, qui est un $\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma}$, peut être posé sous la forme $\sum_\xi \mathcal{E}_\xi + M$, où $\xi = 0$ ou bien ξ est de la forme $\xi = \mu + \omega^\gamma$ et M est une partie de l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega$. Pour tels ξ, ξ', il est clair que, si $\xi \neq \xi'$, $\xi + \omega^\gamma \cdot k \neq \xi' + \omega^\gamma \cdot k$. Or, d'après le théorème (0), pour l'ensemble $\mathfrak{F}_\delta^{2\gamma}$ il y a un crible C' appartenant à $\mathfrak{C}$ et qui donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en une série transfinie des constituantes telles que

$$\mathfrak{J}_x = \mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_1 + \cdots\cdots + \mathcal{E}'_\beta + \cdots\cdots + \mathcal{E}'_{\omega^\gamma} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_{\omega^\gamma} = \mathfrak{F}_\delta^{2\gamma}.$$

Posons $C_n = C'$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots, k)$ et considérons un crible $\overline{C} = C \overset{*}{+} C_1 \overset{*}{+} \cdots\cdots \overset{*}{+} C_k$. D'après la remarque faite plus haut, il est évident que $\mathcal{E}_{\omega^\gamma \cdot \alpha}(C) = \overline{\mathcal{E}}_{\omega^\gamma(\alpha+k)}(\overline{C})$. Nous avons donc toujours $\Phi(\omega^\gamma \cdot \alpha) \leqq \Phi\big(\omega^\gamma(\alpha + k)\big)$. c. q. f. d.

Lemme 7. $\Phi(\omega^\gamma \cdot \alpha) \leqq \Phi(\omega^\gamma \alpha + \omega^{\bar{\gamma}} \cdot k)$ où $\gamma > \bar{\gamma} \geqq 1$ et k est un nombre naturel.

Tout d'abord, considérons l'ensemble $\sum_r [\sum_{0 < \beta < \omega^{\bar{\gamma}}} \mathcal{E}_\beta^{(r,1)}]$, où r parcourt l'ensemble de tous les nombres rationnels entre 0 et 1 dans l'axe $\mathfrak{J}_y$. D'après le théorème 1, il est un ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}}$. Soit $\mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}}$ l'ensemble complémentaire par rapport à l'axe $\mathfrak{J}_x$ de l'ensemble $\mathfrak{G}_\sigma^{2\bar{\gamma}}$. D'après le théorème (0), il y a un crible C' du type $\omega^{\bar{\gamma}}$ qui est un crible de $\mathfrak{C}$ et qui donne l'ensemble $\mathfrak{F}_\delta^{2\bar{\gamma}}$ comme sa constituante supérieure. En vertu de la même raisons que celle du lemme 6, le crible $\overline{C} = C \overset{*}{+} C_1 \overset{*}{+} \cdots\cdots \overset{*}{+} C_k$, où $C_n = C'$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots, k)$, donne l'ensemble $\mathcal{E}_{\omega^\gamma \cdot \alpha}(C)$ comme sa constituante $\overline{\mathcal{E}}_{\omega^\gamma \cdot \alpha + \omega^{\bar{\gamma}} k}(\overline{C})$. On a donc $\Phi(\omega^\gamma \cdot \alpha) \leqq \Phi(\omega^\gamma \cdot \alpha + \omega^{\bar{\gamma}} \cdot k)$. c. q. f. d.

Lemme 8. α et β étant deux nombres transfinis tels que $\omega^{\gamma} \leqq \alpha < \beta < \omega^{\gamma+1}$, on a toujours $\Phi(\alpha) \subseteqq \Phi(\beta)$.

Posons $\alpha = \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_{i-1}} + \omega^{\gamma_i} + \omega^{\gamma_{i+1}} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_k}$ et $\beta = \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots\cdots + \omega^{\gamma_{i-1}} + \omega^{\bar{\gamma}_i} + \omega^{\bar{\gamma}_{i+1}} + \cdots\cdots + \omega^{\bar{\gamma}_l}$. Nous pouvons supposer que: $\gamma \geqq \gamma_1 \geqq \gamma_2 \geqq \cdots\cdots \geqq \gamma_{i-1} \geqq \bar{\gamma}_i > \gamma_i \geqq \gamma_{i+1} \geqq \cdots\cdots \geqq \gamma_k \geqq 0$ et $\bar{\gamma}_i \geqq \bar{\gamma}_{i+1} \geqq \cdots\cdots \geqq \bar{\gamma}_l \geqq 0$. D'après le lemme 5, on a $\Phi(\alpha) \subseteqq \Phi(\alpha + \omega^{\bar{\gamma}_i})$. Ensuite, d'après les lemmes 3, 6 et 7, $\Phi(\alpha + \omega^{\bar{\gamma}_i}) \subseteqq \Phi(\beta)$. Nous avons donc $\Phi(\alpha) \subseteqq \Phi(\beta)$. c. q. f. d.

Or, en rapprochant les lemmes 1, 2, 3, 4 et 8, nous pouvons immédiatement conclure que, pour α et β général, l'inclusion suivante:

$$\Phi(\alpha) \subseteqq \Phi(\beta) \qquad \text{pour } \alpha < \beta$$

est vérifiée. c. q. f. d.