

## 70. Sur la stabilité du problème de Dirichlet.

Par Masao INOUE.

L'Institut Mathématique, L'Université Impériale d'Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Le but de cette note est de donner quelques remarques sur la stabilité du problème de Dirichlet qui a été déjà discutée par MM. Keldych et Lavrentieff.<sup>1)</sup>

Considérons dans l'espace à 3 dimensions un domaine borné  $D$ , de frontière  $\Sigma$  sans portion intérieure et une fonction continue (réelle)  $f$  donnée sur  $\Sigma$ . Soient  $\{D_n^{(1)}\}$ ,  $\{D_n^{(2)}\}$  deux suites de domaines réguliers pour le problème de Dirichlet tels que

$$D_n^{(1)} \subset D_{n+1}^{(1)} \subset \dots \subset D, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{(1)} = D$$

et

$$D_n^{(2)} \supset D_{n+1}^{(2)} \supset \dots \supset D, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{(2)} = \bar{D} = D + \Sigma.$$

Soit  $F$  un prolongement continu de  $f$ , et désignons par  $H(z, F, D_n^{(i)})$  la fonction harmonique dans  $D_n^{(i)}$  qui coïncide avec  $F$  sur la frontière de  $D_n^{(i)}$ . Les deux suites  $\{H(z, F, D_n^{(i)})\}$  ( $i=1, 2$ ) convergent vers deux fonctions harmoniques dans  $D$ , ne dépendant que des valeurs de  $F$  sur  $\Sigma$ , c'est-à-dire de  $f$ , soient  $H^{(i)}(z, f, D)$ ,  $i=1, 2$ .

Analogiquement au cas de la régularité, où nous disons qu'un point-frontière  $P$  de  $D$  est régulier (pour le problème de Dirichlet), si, quelle que soit la fonction  $f$ ,  $H^{(1)}(z, f, D)$  tend vers  $f(P)$  lorsque  $z$  tend vers  $P$ , nous dirons que  $P$  est un point de stabilité (pour le problème de Dirichlet), si, quelle que soit la fonction  $f$ ,  $H^{(2)}(z, f, D)$  tend vers  $f(P)$  lorsque  $z$  tend vers  $P$ .<sup>3)</sup>

Cette définition une fois donnée, nous remarquons que le théorème de Wiener et Phillips<sup>4)</sup> donnant un critère géométrique pour qu'un point-frontière soit régulier, reste encore valable dans notre cas :

Désignons par  $\sigma_r$  l'aire de la projection de  $D_r^*$  projetée sur un plan quelconque  $\mathfrak{P}_r$  passant par  $P$ , où  $D_r^*$  désigne l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à  $\bar{D}$  et qui sont renfermés dans  $C_r$ , la sphère de centre  $P$  et de rayon  $r$ . Alors nous avons le

1) M. Keldych et M. Lavrentieff: Sur le problème de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. Paris, **204**, 1788-1790 (1937).

M. Keldych: Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet, C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 315-318 (1938).

2) La fonction  $H^{(1)}(z, f, D)$  est nommée solution généralisée du problème de Dirichlet pour  $D$  et valeurs-frontière  $f$ .

3) Notre définition de la stabilité diffère en apparence de celle donnée par les auteurs précédents, de la stabilité d'un point-frontière au cas où  $D$  est jordanien, mais nous saurons plus tard, d'après le théorème 8 qui sera établi dans la présente note, que cette différence n'est pas essentielle.

4) H. B. Phillips and N. Wiener: Nets and the Dirichlet Problem, J. of Math. and Phys., **2**, 103-124 (1923).

**Théorème 1.** *Si l'on peut choisir deux suites  $\{r_n\}$  et  $\{\beta_{r_n}\}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{r_n}}{r_n^2} > 0$ ,  $P$  est un point de stabilité.<sup>1)</sup>*

D'après ce théorème, nous savons qu'un point-frontière auquel la frontière est surface analytique est un point de stabilité et que, plus généralement, un point-frontière satisfaisant à la condition de Poincaré l'est aussi.

Da la définition de la stabilité donnée plus haut, nous pouvons conjecturer que de divers théorèmes obtenus dans le cas de la régularité seront encore établis en remplaçant des fonctions harmoniques jouant un rôle principal dans ces théorèmes, v. g. la fonction de Green généralisée, le potentiel conducteur, qui ont été définies par le moyen d'approximation intérieure des domaines, par celles qui sont définies par le moyen d'approximation extérieure des domaines, et cette conjecture est généralement vraie.

En effet, nous avons les théorèmes suivants:

**Théorème 2.** *Pour qu'un point-frontière  $P$  de  $D$  soit un point de stabilité, il faut et il suffit qu'il existe une suite de fonctions  $v_n(z)$  telles que*

1°.  $v_n(z)$  soit harmonique et positive dans  $D_n^{(2)}$ ;

2°.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(z) = v(z)$  soit harmonique et positive dans  $D$ , et  $\lim_{z \rightarrow P} v(z) = 0$ .

**Théorème 3.<sup>2)</sup>** *Soit  $z_0$  un point intérieur à  $D$ . Les fonctions de Green  $G(z, z_0, D_n^{(2)})$  de  $D_n^{(2)}$ , dont le pôle est  $z_0$ , tendent vers une fonction limite indépendante des  $D_n^{(2)}$ , soit  $G^{(2)}(z, z_0, D)$ . Alors, pour qu'un point-frontière  $P$  de  $D$  soit un point de stabilité, il faut et il suffit que l'on ait  $\lim_{z \rightarrow P} G^{(2)}(z, z_0, D) = 0$ .*

**Théorème 4.** *Soit  $\rho$  un nombre positif. Désignons par  $V_{n,\rho}(z)$  le potentiel conducteur de  $\overline{C_\rho} - D_n^{(2)}$  et par  $V_\rho(z)$  la fonction limite de  $V_{n,\rho}(z)$ . Alors, pour qu'un point-frontière  $P$  de  $D$  soit un point de stabilité, il faut et il suffit que l'on ait  $\lim_{z \rightarrow P} V_\rho(z) = 1$ .*

Maintenant nous passons à un problème concernant la stabilité du problème de Dirichlet pour  $D$ . En suivant MM. Keldych et Lavrentieff, nous dirons que le problème de Dirichlet est stable pour  $D$ , si, quelle que soit la fonction  $f$ ,  $H^{(1)}(z, f, D)$  est constamment égale à  $H^{(2)}(z, f, D)$  dans  $D$ .

Citons d'abord le

**Théorème 5.** *Supposons que la condition donnée au théorème 1 soit satisfaite en tout point-frontière de  $D$ , sauf des points d'un ensemble de capacité nulle. Alors le problème de Dirichlet est stable pour  $D$ .*

Nous allons rechercher une simple relation entre la stabilité du problème de Dirichlet pour  $D$  et la capacité<sup>3)</sup> d'un domaine qui correspond à  $D$  par inversion.

1) La démonstration est presque la même que celle de Phillips-Wiener.

2) Le théorème semblable a été donné par M. Brelot: Sur le problème de Dirichlet et les fonctions sous-harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris, **206**, 1161-1163 (1938), où il a défini l'hyperstabilité d'un point-frontière.

3) Nous entendons par la capacité celle au sens de O. Frostman (capacité newtonienne) (ou de la Vallée Poussin).

Considérons seulement  $D$  contenant l'origine  $O$  sans perdre la généralité. Supposons d'abord que le problème de Dirichlet soit stable pour  $D$ , c'est-à-dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H(z, F, D_n^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(z, F, D_n^{(2)})$ , quelle que soit la fonction  $F$ . En prenant en particulier

$$F(z) = \frac{1}{|z|},$$

et en posant

$$H(z, F, D_n^{(i)}) = \frac{1}{|z|} V_n^{(i)}(z') \quad (\text{Transformation de L. Kelvin}),$$

où  $z'$  est le point auquel  $z$  est transformé par l'inversion pour  $S(C_1)$ ,  $C_1$  étant la sphère de rayon 1 et de centre  $O$ , et  $S(C_1)$  la surface de  $C_1$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{(1)}(z') = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^{(2)}(z').$$

Cela étant, d'après la propriété de la transformation de L. Kelvin, on sait que  $V_n^{(i)}(z')$  est le potentiel conducteur de  $\overline{\mathfrak{D}}_n^{(i)}$ , l'ensemble des points auxquels sont transformés par l'inversion pour  $S(C_1)$  les points de l'ensemble complémentaire à  $D_n^{(i)}$ . Désignons dorénavant simplement par la lettre allemande  $\mathfrak{D}$  ( $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}_n^{(i)}$ ,  $\overline{\mathfrak{D}}_n^{(i)}$ ) l'ensemble des points auxquels sont transformés par l'inversion pour  $S(C_1)$  les points de l'ensemble complémentaire à  $\overline{D}$  ( $D$ ,  $\overline{D}_n^{(i)}$ ,  $D_n^{(i)}$ ).  $S_{r'}$  étant la surface de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r'$ , renfermant  $\mathfrak{D}$  entièrement dans son intérieur, on obtient

$$\begin{aligned} C(\overline{\mathfrak{D}}) &= \text{la capacité de } \overline{\mathfrak{D}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{r'}} \frac{dV_n^{(1)}}{dN} dS \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{r'}} \frac{dV_n^{(2)}}{dN} dS \\ &= \text{la capacité de } \mathfrak{D} = C(\mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Inversement, nous démontrons que, si  $C(\overline{\mathfrak{D}}) = C(\mathfrak{D})$ , le problème de Dirichlet est stable pour  $D$ .

En effet,  $V_n^{(i)}$  étant le potentiel conducteur de  $\overline{\mathfrak{D}}_n^{(i)}$ , on a par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_{r'}} \left( \frac{dV_n^{(1)}}{dN} - \frac{dV_n^{(2)}}{dN} \right) dS = 0.$$

Posons ici

$$V_n^{(i)}(z') = |z| U_n^{(i)}(z) \quad (i=1, 2)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n^{(1)}(z) - U_n^{(2)}(z)) = U(z),$$

où  $z$  est le point auquel  $z'$  est transformé par l'inversion pour  $S(C_1)$ . Alors, de l'égalité ci-dessus, on est conduit à l'égalité suivante :

$$U(O) = 0.$$

Puisque la fonction  $U(z)$  est harmonique et non négative dans  $D$ , elle ne peut être que nulle constamment dans  $D$  et, par suite, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(1)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(2)}(z).$$

En posant

$$G_n^{(i)}(z) = \frac{1}{|z|} - U_n^{(i)}(z)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{(i)}(z) = G^{(i)}(z) \quad (i=1, 2),$$

on a

$$G^{(1)}(z) = G^{(2)}(z),$$

où  $G_n^{(i)}(z)$  n'est autre que la fonction de Green de  $D_n^{(i)}$  dont le pôle est l'origine.  $P$  étant un point-frontière régulier, on a, d'après le théorème bien connu de Bouligand,<sup>1)</sup>

$$\lim_{z \rightarrow P} G^{(1)}(z) = 0,$$

par conséquent

$$\lim_{z \rightarrow P} G^{(2)}(z) = 0.$$

Donc,  $P$  est un point de stabilité d'après le théorème 3. On sait par là que tout point-frontière régulier de  $D$  est un point de stabilité, d'où il résulte immédiatement

$$H^{(1)}(z, f, D) = H^{(2)}(z, f, D),$$

car  $H^{(1)}(z, f, D)$  coïncide<sup>2)</sup> avec  $H^{(2)}(z, f, D)$  sur la frontière de  $D$ , sauf, au plus, les points-frontière irréguliers dont l'ensemble est de capacité nulle. Ainsi, le théorème suivant a été complètement établi.

**Théorème 6.** *Pour que le problème de Dirichlet soit stable pour  $D$ , il faut et il suffit que la capacité de  $\bar{\mathfrak{D}}$  soit égale à celle de  $\mathfrak{D}$ .*

Nous ajoutons de plus le

**Théorème 7.** *Pour que le problème de Dirichlet soit stable pour  $D$ , il faut et il suffit que l'on ait  $G^{(1)}(z_0, z_1, D) = G^{(2)}(z_0, z_1, D)$ ,  $z_0$  et  $z_1$  étant deux points distincts de  $D$ .*

Puis nous énonçons le théorème suivant qui a été déjà établi par les auteurs précités dans le cas particulier,  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

**Théorème 8.** *Soient  $P$  un point-frontière de  $D$  et  $\gamma_n$  la capacité de l'ensemble ouvert des points non situés dans  $\bar{D}$  et dont la distance à  $P$  est comprise entre  $\lambda^{n+1}$  et  $\lambda^n$ , où  $\lambda$  est un nombre positif inférieur à 1. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que  $P$  soit un point de stabilité est que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$  soit divergente.*

Les théorèmes obtenus dans la présente note nous permettront de prouver ce théorème de la même façon que dans la démonstration<sup>3)</sup> du

1) G. Bouligand: Sur le problème de Dirichlet, Ann. Soc. Polon. Math. **4**, 57-112 (1925).

2) Au sens de  $\lim_{z \rightarrow P} H^{(1)}(z, f, D) = \lim_{z \rightarrow P} H^{(2)}(z, f, D)$ .

3) O. D. Kellogg: Foundations of Potential Theory, 331-334.

théorème de Wiener qui correspond au théorème 8 dans le cas de la régularité.

Remarquons que les discussions sur la stabilité du problème de Dirichlet pour un domaine espace ne sont pas toujours les mêmes que celles de la stabilité pour un domaine plan. Aussi les résultats ne sont-ils pas les mêmes nécessairement : par exemple, MM. Keldych et Lavrentieff ont proposé dans le cas de l'espace le théorème d'existence d'un domaine limité par une surface jordanienne pour lequel le problème de Dirichlet est instable, mais ce théorème n'est pas vrai dans le cas du plan : en effet, nous savons que le problème de Dirichlet est toujours stable pour le domaine limité par une courbe jordanienne. Dans ce cas, nous pouvons discuter plus généralement ce problème. Nous terminons cet article en notant que mon mémoire précédent<sup>1)</sup> est consacré à l'étude de ce genre de problème.

---

1) M. Inoué : Une considération sur le problème de Dirichlet, Proc. **13** (1937), 352-357.