PAPERS COMMUNICATED

67. *Eine konformgeometrische Verallgemeinerung der geodätischen Linien.*

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Wir betrachten eine Kurve $\mathfrak{x}(s)$ $\big((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_i\equiv 0,\ i=5$ od. $4\big)$

im konformen Raume	*in der konformen Ebene*

von Liouville und Möbius *als eines der beiden Hüllgebilde* $\mathfrak{x}(s)$, $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ *einer*

Kugelschar $\xi=\xi(s)$, $\big((\xi\xi)_5=1\big)$,	*Kreisschar* $\xi=\xi(s)$, $\big((\xi\xi)_4=1\big)$,

wobei die beiden Punkte $\mathfrak{x}(s)$ und $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ $\big((\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}})_i\equiv 0\big)$ durch die Forderungen

(1) $(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_i=2k^2,\qquad (d\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_i\equiv-(d\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x})_i=0\,,\qquad (i=5$ od. $4)$

normiert sind und der Parameter s die konforme Länge ist:[1]

(2) $ds^2=(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_5\,.$	$ds^2=(d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_4\,.$

Wir leiten daraus eine zweite Kurve $(\tilde{\mathfrak{x}}^*)$ her durch den Ansatz

(3) $\tilde{\mathfrak{x}}^*=\tilde{\mathfrak{x}}+(ut+vz+w\mathfrak{X}'+q\mathfrak{X})\,,$	$\tilde{\mathfrak{x}}^*=\tilde{\mathfrak{x}}+(ut+w\xi+q\mathfrak{X})\,,$

$$\tilde{\mathfrak{x}}\equiv\rho(s)\,\mathfrak{x}\,,$$

wobei u, v, w und q Funktionen von s bedeuten, die noch einen Parameter ε enthalten:

(4) $u=\varepsilon\bar{u}(s)\,,\qquad v=\varepsilon\bar{v}(s)\,,\qquad w=\varepsilon\bar{w}(s)\,,\qquad q=\varepsilon\bar{q}(s)\,,$

und, wegen $(\tilde{\mathfrak{x}}^*\tilde{\mathfrak{x}}^*)_i=0\,,\ (\tilde{\mathfrak{x}}\tilde{\mathfrak{x}})_i=0\,,$

(5) $2\mu^{-1}(w+iq)\,\rho+u^2+v^2+w^2+q^2=0$	$2\mu^{-1}q\rho+u^2+w^2+q^2=0$

ist. Rückt $\varepsilon\to 0$, so rückt die Nachbarkurve $(\tilde{\mathfrak{x}}^*)$ gegen $(\tilde{\mathfrak{x}})$. Wir wollen den Parameter

(6)
$$\tilde{s}^*=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\left(\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\,\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\right)_i}\,ds$$

nach Potenzen von ε entwickeln. Diese Entwickelung ist von der Form

(7)
$$\tilde{s}^*=\tilde{s}+\delta g+\cdots\cdots\,,\qquad \big(d\tilde{s}^2=(d\tilde{\mathfrak{x}}d\tilde{\mathfrak{x}})_i=\rho^2ds^2\big)\,,$$

wenn mit δg das in ε lineare Glied bezeichnet wird:

(8)
$$\delta g=\varepsilon\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{s}^*-\tilde{s}}{\varepsilon}\,.$$

---

1) Wir benutzen die Bezeichnungsweise im Buch: T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. I. Tokyo (1938), S. 74 und S. 99.

Dieses δg soll zunächst berechnet werden. Aus (3) folgt durch Ableitung und durch Benutzung der Formeln (403) des oben zitierten Buches

$$\text{(9)}\quad \frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}=\left(\rho-\frac{v}{R}+\mu w+\frac{du}{ds}\right)\mathfrak{t} +\left(\frac{dv}{ds}+\frac{u}{R}\right)\mathfrak{z}+\frac{dw}{ds}\mathfrak{X}' +\left(\frac{dq}{ds}+\mu iu+\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{ds}w -\frac{q}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\right)\mathfrak{X}-\left(\mu^2u-\frac{d\rho}{ds}\right)\mathfrak{x}$$

$$\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}=\left(\rho-\frac{w}{R}+\frac{du}{ds}\right)\mathfrak{t} +\frac{dw}{ds}\xi +\left(\frac{dq}{ds}+\mu iu-\frac{q}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\right)\mathfrak{X} -\left(iq\frac{d\mu}{ds}+\mu^2u+\frac{d\rho}{ds}\right)\mathfrak{x}$$

und also

$$\text{(10)}\quad \left(\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\right)_5=\left(\rho-\frac{v}{R}+\mu w +\frac{du}{ds}\right)^2+2\left\{\frac{1}{\mu}\frac{d\rho}{ds}\frac{dw}{ds} +\frac{d\rho}{ds}\left(\frac{dq}{ds}+\mu iu+\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{ds}w -\frac{q}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\right)\frac{i}{\mu}\right\}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\left(\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\frac{d\tilde{\mathfrak{x}}^*}{ds}\right)_4 =\left(\rho-\frac{w}{R}+\frac{du}{ds}\right)^2 +\frac{2}{\mu}\frac{d\rho}{ds}\left(i\frac{dq}{ds}-\mu u-i\frac{q}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\right) +\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wobei die weggelassenen Glieder in ε von zweiter Ordnung sind. Weiter folgt

$$\text{(11)}\quad \frac{ds^*}{ds}=\rho-\frac{v}{R}+\mu w+\frac{du}{ds} +\frac{1}{\mu\rho}\frac{d\rho}{ds}\left\{\frac{dw}{ds}+i\frac{dq}{ds}-\mu u -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds}w-i\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{ds}q\right\}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\tilde{s}^*}{ds}=\rho-\frac{w}{R}+\frac{du}{ds} +\frac{1}{\mu\rho}\frac{d\rho}{ds}\left\{i\frac{dq}{ds}-\mu u -i\frac{q}{\mu}\frac{d\mu}{ds}\right\}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und durch Integration

$$\text{(12)}\quad \tilde{s}^*=\tilde{s}+\Big[u\Big]_{s_1}^{s_2}-\int_{s_1}^{s_2}\frac{v}{R}ds +\left[\frac{w}{\mu\rho}\frac{d\rho}{ds}\right]_{s_1}^{s_2}-i\left[\frac{q}{\mu\rho}\frac{d\rho}{ds}\right]_{s_1}^{s_2} -\int_{s_1}^{s_2}\frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds +\int_{s_1}^{s_2}w\left\{\mu-\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)\right\}ds -i\int_{s_1}^{s^2}q\frac{1}{\mu}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)ds.$$

$$\tilde{s}^*=\tilde{s}+\Big[u\Big]_{s_1}^{s_2}-\int_{s_1}^{s_2}\frac{w}{R}ds +i\left[\frac{q}{\mu\rho}\frac{d\rho}{ds}\right]_{s_1}^{s_2} -\int_{s_1}^{s_2}\frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds -i\int_{s_1}^{s_2}\frac{q}{\mu}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)ds.$$

Ferner haben $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}^*)$ die Randelemente gemeinsam, daher wird nach (5):

$$\delta\tilde{s} = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{v}{R} ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds} ds + \int_{s_1}^{s_2} w\mu ds + \int_{s_1}^{s_2} \frac{(u^2+v^2+w^2+q^2)}{2\rho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)ds. \tag{13}$$

$$\delta\tilde{s} = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{w}{R} ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds} ds + \int_{s_1}^{s_2} \frac{u^2+w^2+q^2}{2\rho}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)ds.$$

Nach (13) ersehen wir dass das letzte Glied von zweiter Ordnung in ε ist, so dass (13) wird zu:

$$\delta\tilde{s} = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{v}{R} ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds} ds + \int_{s_1}^{s_2} w\mu ds. \qquad \Bigg| \qquad \delta\tilde{s} = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{w}{R} ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{u}{\rho}\frac{d\rho}{ds} ds.$$

Damit $\int d\tilde{s}$ extrem werde, muss für alle Werte von u, v und w $\delta\tilde{s}=0$ sein, so dass

$$\frac{1}{R}=0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}=0, \quad \mu=0 \qquad \Bigg| \qquad \frac{1}{R}=0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}=0$$

also

$$\frac{1}{R}=0, \quad \mu^2=0, \quad \rho=\text{konst.} \qquad \Bigg| \qquad \frac{1}{R}=0,^{1)} \quad \rho=\text{konst.} \tag{14}$$

gelten muss. Für die linke Seite sind die extremalen Kurven $\delta\int d\tilde{s}=0$ entweder euklidische Geraden (Krümmung $R^{-1}=0$, Raumkrümmung $\mu^2=0$) oder ihre Konformverwandten. Hieraus erhalten wir den

Satz. *Die extremalen Kurven* $\delta\int d\tilde{s}=0$ *für beliebig normiertes*[2] $d\tilde{s}=\rho(s)ds$ *sind Kreise und finden nur bei der Normierung* (1), (2) *statt.*[3]

---

1) Aus der Formel $(74)_3$ $\frac{d\xi}{ds}=-\frac{t}{R}$ des oben zitierten Buches und $R^{-1}=0$ folgt $\xi=$konst..

2) D. h. „für nicht-normiertes" so zu sagen.

3) Dabei müsste man nicht übersehen, dass es sich nicht nur um die *Kurven* handelte, sondern es sich auch um *beliebige Tangential-Kugel-* (*Kreis-*) *scharen* handelte, trotzdem die Randelemente Punkte waren.