PAPERS COMMUNICATED

1. *Ein Beweis der Invarianz der Bettischen Gruppen bei Unterteilung der Komplexe.*

Von Shôkichi IYANAGA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1939.)

Es seien K ein Euklidischer Komplex, $K_1 = \upsilon(K)$ eine Unterteilung von K. Beliebige Koeffizientenbereiche $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ seien zugrundegelegt. Die Gruppen der algebraischen Komplexe, der Zyklen, der berandenden Zyklen von K bzw. K_1 bezeichnen wir wie üblich[1] mit L, Z, H bzw. L_1, Z_1, H_1. Im folgenden geben wir einen einfachen Beweis dafür, dass die beiden Bettischen Gruppen $B = Z/H$ und $B_1 = Z_1/H_1$ zueinander isomorph sind.

Die durch υ bewirkte Unterteilung des algebraischen Komplexes C von K bezeichnen wir mit $\upsilon(C)$. Somit wird υ als ein Operator auf die Gruppe L aufgefasst; er ist linear und bekanntlich mit der Randbildung vertauschbar,[2] und bildet L, Z, H bzw. isomorph in L_1, Z_1, H_1 ab: $L \cong \upsilon(L) \subset L_1$, $Z \cong \upsilon(Z) \subset Z_1$, $H \cong \upsilon(H) \subset H_1$. Mithin gilt $B \cong \upsilon(Z)/\upsilon(H)$. Zum Beweis der Isomorphie $B \cong B_1$ genügt es also zu zeigen 1) $\upsilon(H) = \upsilon(Z) \frown H_1$, und 2) $Z_1 = \upsilon(Z) \smile H_1$. Diese folgen nun aus zwei Hilfssätzen, von denen der erste übrigens eine längst (im wesentlichen) bekannte Tatsache ist.

1. Die Simplexe von K bezeichnen wir allgemein mit x_ν. L_ν sei die vom x_ν erzeugte (zu $\mathfrak{J}$ isomorphe) Untergruppe von L. Die L_ν bilden direkte Summanden von $L : L = \sum\limits_\nu L_\nu$. Die Dimensionen der Simplexe, Komplexe usw. deuten wir wie üblich durch obere Indizes an. L^r sei also die Gruppe der r-dimensionalen algebraischen Komplexe. Es gilt ebenfalls $L = \sum\limits_r L^r$.

Hilfssatz 1. *Es sei φ ein linearer, mit der Randbildung vertauschbarer Operator auf L, sodass $\varphi(L) \subset L$, und zwar* 1) $\varphi(L_\nu) \subset L_\nu$ $\big($*also* $\varphi(L^r) \subset L^r\big)$, *und* 2) $\varphi(L^0) = 0$. *Dann gilt* $\varphi(L) = 0$.

Dies ist der bekannte Schluss, mit dem man den „3. Erhaltungssatz"[3] zu beweisen pflegt.[4] Der Beweis geschieht (in bekannter Weise) durch vollständige Induktion in bezug auf die Dimension sehr einfach

---

1) Vgl. P. Alexandroff und H. Hopf: Topologie I, Berlin, 1935. Im folgenden mit A-H zitiert. Wegen der Bezeichnungen und der Terminologie befolgen wir (bis auf manche kleinen Abweichungen) den Gebrauch in diesem Buch. Der folgende Beweis wird als Vorbereitung zum Invarianzbeweis im Kap. IX von diesem Buch besonders geeignet sein.

2) A-H Kap. VI § 2, 2. S. 255.

3) A-H Kap. IX § 1, 1 Satz 2. S. 340.

4) Wir verwenden ihn übrigen auch zum selben Zweck, und für das folgende ist nur das Korollar 1 (=3. Erhaltungssatz) massgebend. Wir baben jedoch den Hilfssatz so formuliert, um die formale Analogie mit dem Hilfssatz 2 hervorzuheben.

so: $\varphi(L^0)=0$ ist vorausgesetzt. $\varphi(L^{r-1})=0$ sei schon bewiesen. Um $\varphi(L^r)=0$ zu zeigen, genügt es $\varphi(x_\nu^r)=0$ für einzelnes x_ν^r nachzuweisen. Nach 1) ist $\varphi(x_\nu^r)=tx_\nu^r$, $t\in\mathfrak{J}$. Da ferner φ linear und mit der Randbildung vertauschbar ist, $t\dot{x}_\nu^r=\big(\varphi(x_\nu^r)\big)^{\bullet}=\varphi(\dot{x}_\nu^r)\in\varphi(L^{r-1})=0$. Also ist $t=0$.

Nun sei $\varkappa$ eine natürliche Verschiebung[1] von K_1 in K; d. h. eine Zuordnung jedes Eckpunktes a von K_1 zu einem Eckpunkt des Trägers von a in K. Sie bestimmt eine simpliziale Abbildung von K_1 in K — die wir ebenfalls mit $\varkappa$ bezeichnen — und als solche ist sie ein linearer, mit der Randbildung vertauschbarer Operator auf L_1, der L_1 in L abbildet. Aus dem Hilfssatz 1 folgt nun:

Korollar 1. $\varkappa\upsilon(C)=C$ *für alle* $C\in L$.

Denn setzt man $\varkappa\upsilon(C)-C=\varphi(C)$, so hat φ offenbar alle in der Voraussetzung des Hilfssatzes 1 aufgezählten Eigenschaften.

Korollar 2. $\upsilon(H)=\upsilon(Z)\frown H_1$.

Denn die linke Seite ist offenbar in der rechten enthalten. Nun sei $z\in Z$ und $\upsilon(z)\in H_1$, d. h. $\upsilon(z)=\dot{C}_1$, $C_1\in L_1$. Setzen wir $\varkappa(C_1)=C$, so gilt wegen $\varkappa\upsilon(z)=z$ und $\varkappa(\dot{C}_1)=\big(\varkappa(C_1)\big)^{\bullet}$, $\upsilon(z)=\upsilon\varkappa\upsilon(z)=\upsilon\varkappa(\dot{C}_1)=\upsilon(\dot{C})$. D. h. $\upsilon(z)\in\upsilon(H)$.

Bemerkung. Bezeichnet man die Gruppe der berandungsfähigen Zyklen von K mit Z^*, so folgt leicht aus diesem Korollar $\big($wegen $\upsilon(Z)\supset\upsilon(Z^*)\supset\upsilon(H)\big)$ dass auch $\upsilon(H)=\upsilon(Z^*)\frown H_1$ gilt.

Korollar 3. *Jede simpliziale Zellenhülle, also insbesondere jede Unterteilung X einer Simplexhülle $|\overline{x}|$ ist ein H-Simplex; d. h.* (*in leicht verständlicher Schreibweise*) $Z^*(X)=H(X)$.[2]

Von X kann man nämlich leicht eine weitere Unterteilung $X_1=\upsilon(X)$ derart bilden, dass für alle berandungsfähigen Zyklen z in X $\upsilon(z)$ in X_1 beranden.[3] Jetzt seien die Bezeichnungen Z^*, H, bzw. H_1 zurzeit auf X bzw. X_1 bezogen. Dann gilt also hier $\upsilon(Z^*)\subset H_1$. Aus der vorigen Bemerkung folgt also $\upsilon(H)=\upsilon(Z^*)$, mithin gilt $Z^*=H$.

2. Wir kehren zum allgemeinen Fall zurück. L, L_1 usw. seien wieder auf K, K_1 bezogen. Es seien x_μ, x_ν Simplexe von K. $\mu\prec\nu$ soll bedeuten, dass x_μ eine Seite von x_ν ist. Die Hülle $|\overline{x_\nu}|$ von x_ν ist also gleich der Summe: $\sum_{\mu\prec\nu}|x_\mu|$. Die Unterteilung $\upsilon(|\overline{x_\nu}|)$ von $|\overline{x_\nu}|$ bezeichnen wir mit X_ν. Die Simplexe von K_1 bezeichnen wir allgemein mit y_ρ. Die y_ρ, von denen x_ν der Träger ist, erzeugen eine Untergruppe $L_{1\nu}$ von L_1. ($L_{1\nu}$ bilden direkte Summanden von L_1: $L_1=\sum_\nu L_{1\nu}$.) Wir schreiben $\overline{L}_{1\nu}=\sum_{\mu\prec\nu}L_{1\mu}$. Offenbar ist $\overline{L}_{1\nu}=L(X_\nu)$.

Hilfssatz 2. *Es sei φ ein linearer, mit der Randbildung vertauschbarer Operator auf L_1 sodass $\varphi(L_1)\subset L_1$, und zwar* 1) $\varphi(\overline{L}_{1\nu})\subset\overline{L}_{1\nu}$, 2) $\varphi(L_1^r)\subset L_1^r$, *und* 3) $\varphi(L_1^0)\subset Z_1^*$. *Dann gilt* $\varphi(Z_1)\subset H_1$.

Beweis. Wir zeigen, dass ein linearer Operator ψ auf L_1 sich so finden lässt, dass $\psi(L_1)\subset L_1$, $\psi(\overline{L}_{1\nu})\subset\overline{L}_{1\nu}$, $\psi(L_1^r)\subset L_1^{r+1}$ und zwar

---

1) A-H Kap. IX § 1, 2. S. 349.
2) A-H Kap. VI § 2, 7 Satz VIII. S. 260.
3) A-H Kap. VI § 2, 4 Lemma. S. 258.

(1) $$\varphi(C_1) = \big(\psi(C_1)\big)^{\cdot} + \psi(\dot{C}_1) \quad \text{für alle} \quad C_1 \in L_1$$

gilt. Hieraus folgt unmittelbar unsere Behauptung $\varphi(Z_1) \subset H_1$, denn $\psi(\dot{Z}_1) = \psi(0) = 0$ nach der Linearität von ψ.

Die Konstruktion von $\psi(C_1)$ geschieht rekursiv in bezug auf die Dimension von C_1. Zunächst sei $C_1 = y_\rho^0 \in \bar{L}_{1\mu}$. Nach den Bedingungen 1), 2), 3) für φ ist $\varphi(y_\rho^0)$ ein 0-dimensionaler, berandungsfähiger Zyklus in $\bar{L}_{1\mu} = L(X_\mu)$, berandet also nach dem letzten Korollar zum Hilfssatz 1 einen 1-dimensionalen Komplex in X_μ. Wir setzen $\psi(y_\rho^0) =$ diesem 1-dim. Komplex, und allgemein $\psi(C_1^0) = \sum t_\rho \psi(y_\rho^0)$ für $C_1^0 = \sum t_\rho y_\rho^0$. Sodann gilt offenbar (1) für alle $C_1^0 \in L_1^0$.

Nun sei $r \geqq 1$; es seien $\psi(C_1^{r-1})$ für alle $C_1^{r-1} \in L_1^{r-1}$ schon konstruiert, und es gelte dafür (1). Wir wollen $\psi(y_\sigma^r)$ bestimmen. Es sei $y_\sigma^r \in \bar{L}_{1\nu}$. Nun kennt man schon $\psi(\dot{y}_\sigma^r)$, da $\dot{y}_\sigma^r \in L_1^{r-1}$ ist. Nach unserer Annahme gilt ferner $\big(\varphi(y_\sigma^r) - \psi(\dot{y}_\sigma^r)\big)^{\cdot} = \varphi(\dot{y}_\sigma^r) - \big(\psi(\dot{y}_\sigma^r)\big)^{\cdot} = \varphi(\dot{y}_\sigma^r) - \varphi(\dot{y}_\sigma^r) + \psi\big((\dot{y}_\sigma^r)^{\cdot}\big) = 0$. $\varphi(y_\sigma^r) - \psi(\dot{y}_\sigma^r)$ berandet also als ein r-dimensionaler Zyklus in X_ν einen $(r+1)$-dim. Komplex in X_ν. Wir nehmen diesen Komplex als unser $\psi(y_\sigma^r)$. $\psi(C_1^r)$ setzt sich daraus linear zusammen.

Korollar 1. *$\upsilon\varkappa(z_1) \sim z_1$ für alle $z_1 \in Z_1$.*

Setzt man nämlich $\upsilon\varkappa(C_1) - C_1 = \varphi(C_1)$, so hat φ ersichtlich alle geforderten Eigenschaften.

Korollar 2. $Z_1 = \upsilon(Z) \cup H_1$.

Die linke Seite enthält diesmal offenbar die rechte. Sei nun $z_1 \in Z_1$. Setzt man $\varkappa(z_1) = z_1$, so gilt nach dem vorigen Korollar $z_1 \sim \upsilon(z)$, d. h. $z_1 = \upsilon(z) + h_1$ mit $h_1 \in H_1$, oder $z_1 \in \upsilon(Z) \cup H_1$ w. z. b. w.

Aus dem Korollar 2 des Hilfssatzes 1 und dem Korollar 2 des Hilfssatzes 2 folgt, wie anfangs gesagt, die *vollständige Homologieäquivalenz von K und K_1.*[1] Die analoge Methode lässt sich auch auf andere topologische Invarianzbeweise anwenden. Darauf werde ich an einer anderen Gelegenheit zurückkommen.

---

1) A-H Kap. VI § 2, 5 Satz II. S. 258.