51. *Sur une Extension de la Théorie des Fonctions de Baire.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1939.)

La théorie de M. H. Lebesgue sur les fonctions de Baire vient de discuter la relation entre les fonctions de Baire et les ensembles mesurables (B), et le théorème fondamentale de celle-là est le

Théorème. *Pour qu'une fonction f partout définie soit de classe α, il faut et il suffit que, quel que soient a et b, l'ensemble $E(a \leqq f \leqq b)$ soit de classe α au plus, et qu'il soit effectivement de classe α pour certaines valeurs de a et b.*[1]

Cependant, cette méthode de M. H. Lebesgue serait aussi très utile dans la théorie des opérations analytiques des fonctions. Nous verrons dans la suite comment cette méthode est utile dans celle-là.[2]

Pour ce but, il nous faut d'abord voir la relation entre les opérations analytiques des fonctions et les opérations analytiques des ensembles. Quand une opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ des fonctions est donnée sur un espace métrique R, il existe, d'après le théorème 7 de O. A., pour tout nombre réel a une opération analytique $\Psi^{(a)}(E_n)$ des ensembles telle qu'on ait

$$\Psi^{(a)}\big(\mathfrak{F}(R)\big) = \mathrm{Ens}\Big(\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) \geqq a\Big).$$

Nous pouvons ici distinguer les deux cas, l'un est que l'opération $\Psi^{(a)}(E_n)$ ne dépend pas du nombre réel a et l'autre est ce qui n'est pas le premier cas. Nous dirons dans le cas premier que l'opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ des fonctions est homogène latéralement, et que les opérations $\Phi\big(F_n(x)\big)$ et $\Psi^{(a)}(E_n)$ sont adjointes l'une l'autre.

Maintenant, nous supposons que l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ soit homogène latéralement. Or, nous ne pouvons conclure dans ce cas que les fonctions de la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ sont déterminées par son opération adjointe des ensembles, c'est-à-dire, une fonction $F(x)$, telle qu'on ait $\mathrm{Ens}\big(F(x) \geqq a\big) \in \Psi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ pour tout nombre réel a, appartient à la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$. Maintenant, nous considérons toutes les opérations analytiques des fonctions adjointes à l'opération $\Psi(E_n)$ et nous prenons la famille $\mathfrak{F}(\Psi)$ de toutes les fonctions obtenues en appliquant ces opérations sur les fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$. Nous pouvons ici

1) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. Journal de Mathématiques, s. 6, t. **1** (1905).

2) Pour les définitions et notations, voir ma note précédente, Sur les opérations analytiques des fonctions. Nous désignons par O. A. cette note dans la suite.

encore distinguer les deux cas, l'un est qu'il existe une opération analytique $\Phi^*\big(F_n(x)\big)$ des fonctions telle qu'on ait $\Phi^*\big(\mathfrak{S}(R)\big)=\mathfrak{F}(\Psi)$ et l'autre est ce qui n'est pas le premier cas. Nous dirons dans le premier cas que l'opération $\Phi^*\big(F_n(x)\big)$ est saturée par rapport à l'opération $\Psi(E_n)$ des ensembles. Mais, nous pouvons donner les exemples des opérations analytiques des ensembles telles qu'il n'existe pas l'opération analytique saturée par rapport à celle-là. D'où nous avons un problème suivant: quelque opération analytique des ensembles a-t-elle l'opération saturée par rapport à celle-là et quelle opération analytique des fonctions est-elle saturée par rapport à celle-là?

1. *Les préliminaires.* Avant de rechercher le problème donné, nous introduirons quelques notions. Quand une famille $\mathfrak{F}$ des fonctions jouit de la propriété suivante: la borne supérieure de toute suite infinie (ou finie) des fonctions de $\mathfrak{F}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}$, nous dirons que $\mathfrak{F}$ est du type $(\sigma, *)$ $\big($ou $(s, *)\big)$. De même, quand la borne inférieure de toute suite infinie (ou finie) des fonctions de $\mathfrak{F}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}$, nous dirons que $\mathfrak{F}$ est du type $(*, \delta)$ $\big($ou $(*, d)\big)$. Enfin, quand $\mathfrak{F}$ est à la fois du type $(s, *)$ et $(*, \delta)$ nous dirons que $\mathfrak{F}$ est du type (s, δ). De même, nous définirons la famille du type (σ, δ) ou bien (s, d) ou bien (δ, d).

Puis nous prolongerons la notion de la limite sur les opérations analytiques des fonctions. Nous dirons qu'une suite $\{F_n^{(0)}(x)\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$ converge faiblement vers la limite $\Phi\big(F_n^{(0)}(x)\big)$ par rapport à $\Phi\big(F_n(x)\big)$, quand il existe une suite $\{F_n^{(1)}(x)\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$ telle qu'on ait $-\Phi\big(F_n^{(0)}(x)\big)=\Phi\big(F_n^{(1)}(x)\big)$, et nous désignons par $L\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ la famille de toutes les limites de la convergence faible des suites des fonctions de la famille $\mathfrak{S}(R)$.

2. *L'existence des opérations analytiques saturées.*

Théorème 1. *Soient R un espace et $\Psi(E_n)$ une opération analytique des ensembles définie sur toute suite des sous-ensembles de R. Quand la famille $\Psi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$ est multiplicative,*[1] *il existe l'opération analytique saturée par rapport à $\Psi(E_n)$ et elle est l'opération analytique $\Phi\big(F_n(x)\big)$ adjointe à $\Psi(E_n)$ ayant la propriété suivante $(*)$: quand une fonction $F(x)$ appartient à la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$, la fonction $\chi\big(F(x)\big)$, où $\chi(t)$ désigne une fonction arbitraire continue, croissante monotone sur l'intervalle $-\infty \leqq t \leqq +\infty$, appartient aussi à $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$.*

Démonstration. Étant donné un intervalle fermé $I=[0, 1]$, nous pouvons donner sur l'espace $R\times[I]$ une fonction caractéristique θ d'un sous-ensemble de $R\times[I]$ de façons que la famille $\Gamma(\theta, R)$ est celle des

1) Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{F}$ des ensembles est multiplicative, quand la partie commune d'une infinité dénombrable des ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient aussi à $\mathfrak{F}$.

fonctions caractéristiques des ensembles de la famille $\Psi(\mathfrak{F}(R))$.[1] Par conséquent, nous pouvons aussi choisir sur $R\times[I]$ les bases θ_n ($n=1, 2, \dots$) des cribles fermés des fonctions telles qu'on ait $\Gamma(\theta_n, R)=\Gamma(\theta, R)$ ($n=1, 2, \dots$) et que, quelle que soit la suite $\{E_n\}$ ($n=1. 2, \dots$) des ensembles de la famille $\Psi(\mathfrak{F}(R))$, nous puissions choisir dans l'espace $R\times \bar{I}$ un sous-ensemble fermé H de sorte que $\Gamma(\theta_n; H)$ soit la fonction caractéristique de E_n.

Or, l'ensemble de tous les nombres rationnels est effectivement dénombrable et donc nous pouvons les ranger en une suite $\{r_n\}$ ($n=1, 2, \dots$). Maintenant, nous définirons sur l'espace $R\times[I]$ la fonction θ^* de manière qu'on ait pour tout nombre réel r ($>-\infty$)

$$\text{Ens}\,(\theta^* \geqq r)=\prod_{r_n\leqq r} E_n\,.$$

La fonction θ^* est une base d'un crible fermé des fonctions qui représente l'opération analytique saturée par rapport à $\Psi(E_n)$, ce qui démontre l'existence de celle-là.

Puis, soit $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions adjointe $\Psi(E_n)$ ayant la propriété (*). Quand une fonction $F(x)$ définie sur R jouit de la propriété suivante: quel que soit le nombre réel r, l'ensemble Ens $(F(x)\geqq r)$ appartient à la famille $\Psi(\mathfrak{F}(R))$, la fonction caractéristique de l'ensemble Ens $(F(x)\geqq r)$ pour tout nombre réel r appartient à la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ et donc pour tout nombre naturel n la fonction

$$F^{(n)}(x)=\nu^{-1}\left\{\max\left(\frac{k+1}{2^n}\chi_{\frac{k}{2^n}}(x)\,,\ k=-2^n,\ -2^n+1\,\dots,\ 2^{n-1}\right)\right\},$$

où $\chi_r(t)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\text{Ens}\left(\nu(F(x))\geqq r\right)$ et $\nu(t)$ désigne la fonction telle qu'on ait $\nu(\pm\infty)=\pm 1$ et $\nu(t)=\dfrac{t}{1+|t|}$ pour $t\neq\pm\infty$, appartient à la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$. Par conséquent, la fonction $F(x)=\underset{n}{\text{b. i.}}\ F^{(n)}(x)$ appartient aussi à la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$, d'où $\Phi(F_n(x))$ est saturée par rapport à $\Psi(E_n)$. C. Q. F. D.

Remarque. Quand une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions definie sur un espace métrique R est topologique, la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ jouit de la propriété (*).

Corollaire 1. *Soient R un espace métrique et $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions définie sur R. Quand la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ est du type $(*, \delta)$ et jouit de propriéte (*), l'operation $\Phi(F_n(x))$ est saturée par rapport à son opération adjointe.*

Corollaire 2. *Soient R un espace métrique et $\Phi(F_n(x))$ une opé-*

1) Théorème 6, O. A.

ration topologique des fonctions définie sur R. Quand la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ est du type $(*, \delta)$, l'opération $\Phi(F_n(x))$ est saturée par rapport à son opération adjointe.

Corollaire 3. *Soient R un espace métrique et $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions définie sur R. Quand la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ remplit les conditions suivantes:*

1°, *si l'on a $F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$, on a aussi $F(x)+c \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ et $cF(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ $(c>0)$, où c désigne un nombre réel,*

2°, *si l'on a $F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$, on a aussi $\nu(F(x)) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$,*

3°, *si l'on a $F_k(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ $(k=1, 2)$, on a aussi $min(F_1(x), F_2(x)) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$.*

4°, *si une suite $\{F_n(x)\}$ $(n=1, 2, \dots)$ des fonctions de la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ converge uniformément vers la fonction $F(x)$ sur R, on a $F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$,*

l'opération $\Phi(F_n(x))$ est saturée rapport à son opération adjointe.[1]

Remarque. "Vollig autarke Funktionensystem"[2] de H. Hahn remplit les conditions 1°–4° du corollaire 3.

3. *Les prorpiétés totales des opérations analytiques saturées.* Nous donnerons ici les propriétés totales des opérations analytiques saturées. D'après la définition de celles-ci, nous avons sans peine le

Théorème 2. *Soint $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions définie sur un espace métrique R. Quand la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ est du type $(*, \delta)$ et jouit de la propriété $(*)$, pour qu'une fonction $F(x)$ définie sur R appartienne à la famille $\Phi(\mathfrak{F}(R))$ il faut et il suffit qu'on ait Ens $(F(x) \geqq r) \in \Phi(\mathfrak{F}(R))$ pour tout nombre réel r, ou $\Psi(E_n)$ désigne l'opération adjointe de $\Phi(F_n(x))$.*

Corollaire 4. *En la même hypothése que le théorème 2, pour qu'une fonction $F(x)$ définie sur R appartienne à la famille $L\Phi(\mathfrak{S}(R))$, il faut et il suffit que, quels que soient les deux nombres réels a et b $(a \leqq b)$, on ait toujours Ens $(a \leqq F(x) \leqq b) \in \Psi(\mathfrak{F}(R))$, où $\Psi(E_n)$ désigne l'opération adjointe de $\Phi(F_n(x))$.*

Théorème 3. *En la même hypothése que le théorème 2, quand une suite $\{F_n(x)\}$ des fonctions de la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ converge uniformé-*

---

1) Nous pouvons donner une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions definie sur un espace métrique R telle que $\Phi(F_n(x))$ ne soit pas saturée par rapport à son opération adjointe et que la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ remplissent les conditions 1°, 3°, et 4° de ce corollaire.

2) H. Hahn, Reelle Funktionen, Bd. I, 1932, Leipzig, p. 236.

ment vers une fonction $F(x)$ sur R, la fonction $F(x)$ appartient aussi la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$.

Théorème 4. *Soient $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération analytique des fonctions, definie sur un espace métrique R et $\chi(t_1, t_2, \dots, t_m)$ une fonction continue des variables $t_1, t_2, \dots, t_m$ telle qu'elle soit monotone croissante pour chaque variable t_k. Quand l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est du type* (s, δ) *et jouit de la propriété* (*), *nous avons tanjours pour les fonction $F_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$ de la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$, $\chi\big(F_1(x), F_2(x), \dots F_{m-1}(x), F_m(x)\big) \in \Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$.*

Démonstration. Pour la simplicité, nous nous satisfaisons de considérer le cas où $m=2$.

Maintenant, nous prenons l'espace produit $R_0 = R \times T_1 \times T_2$, où T_k $(k=1, 2)$ désignent respectivement l'intervalle $[-\infty, +\infty]$, et les images géométriques $C_k (k=1, 2)$ des foctions $F_k(x)$ respectivement dans $R \times T_k$. Etant donné un nombre réel r, nous considérons l'ensemble $N = \text{Ens}\big(r \leqq \chi(t_1, t_2)\big)$, dans l'espace $T_1 \times T_2$. Nous avons alors

$$\text{Ens}\Big(\chi\big(F_1(x), F_2(x)\big) \geqq r\Big) = \text{Proj}_R\,(C_1 \times T_2)\,(C_2 \times T_1)\,(R \times N).$$

Or, l'ensemble $(C_1 \times T_2)\,(C_2 \times T_1)\,(R \times N)$ a la structure suivante. Étant donné un nombre naturel n, nous prenons les rectangles

$$Q_{ij}: \quad \frac{j}{n} \leqq t_1 \leqq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n} \leqq t_2 \leqq \frac{j+1}{n},$$

$$\hat{Q}_{ij}: \quad \frac{i}{n} \leqq t_1, \qquad \frac{j}{n} \leqq t_2,$$

$$(i, j = -n, -n+1, -n+2, \dots, n-1).$$

L'ensemble

$$S^{(n)} = \sum^{(*)} R_{ij}^{(n)} \times \hat{Q}_{ij},$$

où

$$R_{ij}^{(n)} = \text{Ens}\Big(F_1(x) \geqq \frac{i}{n}\Big)\ \text{Ens}\Big(F_2(x) \geqq \frac{j}{n}\Big),$$

et la sommation $\sum^{(*)}$ s'étend sur tous les rectangles $\hat{Q}_{ij}$ tels qu'on ait $NQ_{ij} \neq 0$, est d'après l'hypothèse un ensemble de la famille $\Psi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$, où $\Psi(E_n)$ désigne l'opération adjointe de $\Phi\big(F_n(x)\big)$. Cependent, nous avons

$$\prod_{n=1}^{\infty} S^{(n)} = (C_1 \times T_2)\, C_2 \times T_2)\,(R \times N),$$

et par suite l'ensemble $\text{Proj}_R\,(C_1 \times T_2)\,(C_2 \times T_1)\,(R \times N) = \text{Ens}\Big(\chi\big(F_1(x), F_2(x)\big) \geqq r\Big)$ appartient à la famille $\Psi\big(\mathfrak{F}(R)\big)$, ce qui entraine $\chi\big(F_1(x), F_2(x)\big) \in \Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$. C. Q. F. D.

Remarque. Dans le théorème 4, les hypothèses que l'opération $\Phi\big(F_n(x)\big)$ est du type $(s, *)$ et jouit de la propriété $(*)$ sont nécessaires.

Théorème 5. *Soint $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération anatique des fonctions admettant l'hypothèse du théorème 4 et $\psi(t_1, t_2, \dots, t_m)$ une fonction continue des variables $t_1, t_2, \dots, t_m$. Nous avons toujours pour les fonctions $F_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, m)$ de la famille $L\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$*

$$\psi\big(F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x) \in L\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) .$$

4. *Les propriétés locales des opérations analytiques saturées.*

Théorème 6. *Soit $\Phi\big(F_n(x)\big)$ une opération topologique des fonctions définie sur un espace métrique R. Quand la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$ est du type $(*, \delta)$, toute fonction $F(x)$ définie sur R de sorte qu'elle appartient à la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(U)\big)$ à un voisinage U de chaque point de R appartient à la famille $\Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, nous pouvons faire correspondre un voisinage $U(p)$ à chaque point p de R de manière que la fonction $F(x)$ sur $U(p)$ appartienne à la famille $\Phi\Big(\mathfrak{S}\big(U(p)\big)\Big)$ et donc nous pouvons donner une suite transfinie $\{p_\lambda\}$ $(\lambda < \eta)$ des points de R de sorte qu'on ait $R = \sum\limits_{\lambda<\eta} U(p_\lambda)$. Nous prenons maintenant un nombre positif r_λ tel qu'on ait $U(p_\lambda) = U(p_\lambda, r_\lambda)$[1] et posons comme il suit,

$$O_\lambda^{(k)} = U\Big(p_\lambda, \frac{k}{1+k} r_\lambda\Big) - \sum_{\mu<\lambda} U(p_\mu) ,$$
$$O_\lambda^{(k,n)} = \sum_{p \in O_\lambda^{(k)},\ \mathrm{dis}\,(p,\, R-U(p_\lambda)) \geq \frac{1}{n}} (p) \qquad (k, n = 1, 2, \dots) .$$

Nous avons alors toujours

$$\mathrm{dis}\,(O_{\lambda_1}^{(k,n)}, O_{\lambda_2}^{(k,n)}) \geqq \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad \lambda_1 > \lambda_2 .$$

Nous posons encore

$$U_\lambda^{(k,n)} = U\Big(O_\lambda^{(k,n)}, \min\Big(\frac{1}{2n}, \frac{r_\lambda}{2(1+k)}\Big)\Big) ,$$

et

$$U^{(k,n)} = \sum_{\lambda<\eta} U_\lambda^{(k,n)} .$$

Les ensembles $U^{(k,n)}$ sont alors onverts et nous avons $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} U^{(k,n)} = R$. L'ensemble $U_\lambda^{(k,n)}$ est contenu dans $U(p_\lambda)$ et donc nous pouvons définir les fonctions continues supérieurement $F_{\lambda,j}^{(k,n)}(x)$ $(j=1, 2, \dots)$, sur R de la façon qu'on ait $F(x) = \Phi\big(F_{\lambda,j}^{(k,n)}(x)\big)$ sur $U_\lambda^{(k,n)}$ et $F(x) \equiv +\infty$ sur $R - U_\lambda^{(k,n)}$. Or, nous avons $F(x) = \underset{(k,n)}{\text{b. i.}}\ \Phi\big(F_{\lambda,j}^{(k,n)}(x)\big)$, et par suite d'après l'hypothèse, nous avons $F(x) \in \Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big)$. C. Q. F. D.

---

1) Étant donnés un sous-ensemble E de R et un nombre positif r, $U(E, r)$ désigne l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait $\mathrm{dis}\,(p, E) < r$.

Corollaire 5. *Soit $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions admettant l'hypothèse du théorème 6. Pour qu'une fonction $F(x)$ sur R appartient à la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$, il faut et il suffit que, quels que soient le point p de R et le nombre proitif ε, qu'il existe un voisinage $U(p)$ du point p et une fonction $G(x)$ de la famille $\Phi\Big(\mathfrak{S}\big(U(p)\big)\Big)$ tels qu'on ait $|F(x)-G(x)|<\varepsilon$ pour tout point du voisinage $U(p)$.*

5. *L'exemple d'une opération analytique.* Enfin, nous ajouterons un exemple d'une opération analytique des fonctions qui n'est pas saturée par rapport à son opération adjointe. D'aprés le corollaire 1, une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions définie sur un espace métrique R, telle que la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ soit de type $(*, \delta)$ et jouisse de le propriété $(*)$, est saturée par rapport à son opèration adjointe, mais il existe une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions définie sur R telle que la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ soit du type $(*, d)$ et jouisse de la propriéte $(*)$ et que l'opération $\Phi(F_n(x))$ ne soit pas saturée par rapport à son opération adjointe, c'est ce qui je donnerai dans la suite.

En prenant dans l'ensemble R^* de tous les nombres irrationnels x, tels qu'on ait $0<x<1$, un point x_0, nous considérons une suite I_k $(k=1, 2, \dots)$ des intervalles de R^* telle qu'on ait $x_0 \bar{\in} I_k$ $(k=1, 2, \dots)$, $I_i I_j=0$ pour $i \neq j$ et $\lim\limits_{k\to\infty} I_k=(x_0)$. Nous prenons encore dans I_k un sous-ensemble $\mathfrak{N}_k$ tel qu'il soit une image topologique d'un ensemble universel des ensembles projectifs de la classe k contenus dans R^* et posons $\mathfrak{N}=(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{N}_k$. Alors, une opération analytique $\Phi(F_{n_1 n_2 \dots n_k}(x))$ des fonctions définie comme il suit

$$\Phi(F_{n_1 n_2 \dots n_k}(x)) = \underset{\mathfrak{N}}{\text{b. s.}} \{\underset{k}{\text{b. i.}}\ F_{n_1 n_2 \dots n_k}(x)\}$$

n'est pas saturée par rapport à son opération adjointe, mais la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ jouit de la propriété $(*)$. Or, la famille $\mathfrak{F}$ de toutes les fonctions min $(F_1(x), F_2(x))$ obtenues lorsque $F_1(x)$ et $F_2(x)$ parcourt les fonctions de la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ peut être représentée par une opération analytique des fonctions, c'est-à-dire il existe une telle opération $\Phi^*(F_n(x))$ remplissant la condition $\Phi^*(\mathfrak{S}(R))=\mathfrak{F}$. La famille $\mathfrak{F}$ est du type $(*, d)$ et jouit de le propriété $(*)$, mais $\Phi^*(F_n(x))$ n'est pas saturée par rapport à son opération adjointe.