14. Über die Überdeckungen von Zellenräumen, III.

Von Atuo KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1940.)

In dieser dritten Note sind einige wichtige Eigenschaften der Reidemeisterschen Überdeckung untersucht.

Es seien K ein endlicher Zellenraum, $\mathfrak{F}$ die Fundamentalgruppe von K. U sei eine Überdeckung von K in bezug auf eine Koeffizientengruppe $\mathfrak{J}$. Dann bestimmt U eine Darstellung,[1] d. h. eine homomorphe Abbildung g von $\mathfrak{F}$ in die Automorphismengruppe Γ, die aus allen invertierbaren Automorphismen von $\mathfrak{J}$ auf sich besteht.

Das Hauptresultat dieser Arbeit besteht darin, dass die Bettische Gruppe von einer Überdeckung U nur von der Darstellung g abhängt.

Zwei Überdeckungen U_1 und U_2 von K in bezug auf $\mathfrak{J}$ heissen äquivalent, wenn U_1 und U_2 eine gleiche Darstellung g von $\mathfrak{F}$ in Γ bestimmen.

a^r sei eine Zelle von K. Ein Automorphismus γ heisst Inzidenzautomorphismus bezüglich a^r, wenn γ bei U zwischen a^r und a^{r+1} $(a^{r+1} > a^r)$, oder zwischen a^r und a^{r-1} $(a^r > a^{r-1})$ definiert ist. Ist γ ein Inzidenzautomorphismus bezüglich a^r bei einer Überdeckung U, so ist es auch γ^{-1}.

Zwei äquivalente Überdeckungen U_1 und U_2 heissen benachbart, wenn ihre Automorphismen bis auf Inzidenzautomorphismen bezüglich eines a^r identisch sind. Dann gilt der folgende

Satz 1. Zwei äquivalente Überdeckungen U_1 und U_2 werden durch eine Folge von benachbarten Überdeckungen verbunden.

Über die Bettische Gruppe kann man folgendes beweisen:

Satz 2. Zwei benachbarte Überdeckungen U_1 und U_2 von K haben isomorphe Bettische Gruppen $B^i(K, U_1)$ und $B^i(K, U_2)$.

Aus Satz 1 und Satz 2 folgt sofort der

Satz 3. Äquivalente Überdeckungen haben isomorphe Bettische Gruppen.

Aus Satz 3 kann man die interessante Folgerung ziehen:

Satz 4. Bei einer wesentlichen[1a] Überdeckung U von einer n-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M^n verschwindet die n-Bettische Gruppe.

Beweis von Satz 1. K_0 sei die baryzentrische Unterteilung[2] von K. Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von K ist als Fundamentalgruppe von

---

1) K. Reidemeister: Überdeckungen von Komplexen. Crelles Jour. **173**.

1a) Eine Überdeckung heisst wesentlich, wenn es unter den Inzidenzautomorphismen bei jeder damit äquivalenten Überdeckung wenigstens einen von Identität verschiedenen Automorphismus gibt, d. i. wenn die Darstellung g von $\mathfrak{F}$ in Γ nicht trivial ist.

2) P. Alexandroff: Discrete Räume. Recueil Math. **2** (44), **3** (1937).

K_0 definiert.[3] Die Inzidenzautomorphismen von einer Überdeckung von K lassen sich also den Strecken s von K_0 zuordnen. B sei ein topologischer Baum von K_0 mit dem Anfangspunkt a^0. s_{i_1} sei die von a^0 ausgehende Strecke in B, d. i. die Strecke von der Länge 1. $s_{i_1 i_2}$ sei die Strecke von der Länge 2, welche von dem anderen Endpunkt $a^1_{i_1}$ von s_{i_1} in B ausgeht. Allgemein können wir mit $s_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Strecke von der Länge n in B bezeichnen. s sei eine Strecke, die zum B nicht gehört. Ihre Endpunkte a und b seien auch die Endpunkte von $s_{i'_1 \dots i'_m}$ und von $s_{i_1 \dots i_p}$. Ist $m \geqq p$, so kann man s mit $s_{i_1 \dots i_p j}$ bezeichnen.

Den Automorphismus von $\mathfrak{F}$, welcher bei U_1 bzw. U_2 einer Strecke s zugeordnet ist, bezeichnen wir mit γ bzw. δ.

Wir konstruieren nun eine neue mit U_1 benachbarte Überdeckung U_{11}:

$$\begin{aligned} s_1 &\to \delta_1 , \\ s_{1 i_2} &\to \gamma_{1 i_2} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} , \\ s_{1j} &\to \gamma_{1j} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} , \\ \text{andere } s &\to \gamma \text{ (invariant)}, \end{aligned}$$

wo der Index -1 den inversen Automorphismus bedeutet. Diese Überdeckungen U_1 und U_{11} sind benachbart, weil sie bis auf Inzidenzautomorphismen bezüglich a^1_1 identisch sind und gleiche Darstellung g von $\mathfrak{F}$ in Γ bestimmen.

Wir konstruieren noch eine mit U_{11} benachbarte Überdeckung U_{12}:

$$\begin{aligned} s_1 &\to \delta_1 , \\ s_{11} &\to \delta_{11} , \\ s_{1i} &\to \gamma_{1i} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} . \qquad (i > 1) \\ s_{1j} &\to \gamma_{1j} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} , \\ s_{11 i_3} &\to \gamma_{11 i_3} \gamma_{11} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} (\delta_{11})^{-1} , \\ s_{11j} &\to \gamma_{11j} \gamma_{11} \gamma_1 (\delta_1)^{-1} (\delta_{11})^{-1} , \\ \text{andere } s &\to \gamma \text{ (invariant)}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise fortfahrend konstruieren wir eine Folge von benachbarten Überdeckungen

$$U_1,\ U_{11},\ U_{12},\ \dots,\ U_{1i},\ \dots .$$

Diese Überdeckungen sind miteinander äquivalent, weil für eine ausser B liegende Strecke s, die mit den Strecken $s_{i'_1 \dots i'_m}$ und $s_{i_1 \dots i_p}$ inzident ist, der abgeänderte Automorphismus von folgender Form ist:

$$\begin{aligned} &\text{von } s_{i_1 \dots i_p} \text{ her } \gamma \gamma_{i_1 \dots i_p} \gamma_{i_1 \dots i_{p-1}} \dots \gamma_{i_1} (\delta_{i_1})^{-1} \dots (\delta_{i_1 \dots i_p})^{-1} \\ &\text{von } s_{i'_1 \dots i'_m} \text{ her } \gamma^{-1} \gamma_{i'_1 \dots i'_p} \gamma_{i'_1 \dots i'_{m-1}} \cdots \gamma_{i'_1} (\delta_{i'_1})^{-1} \dots (\delta_{i'_1 \dots i'_m})^{-1} , \end{aligned}$$

wo γ den Automorphismus von s bei U_1 bedeutet. Aber diese beiden

3) K. Reidemeister: Die Fundamentalgruppe von Komplexen. Math. Zeit. **40** (1935).

Automorphismen sind tatsächlich identisch, weil die Überdeckungen U_1 und U_2 äquivalent sind. Und dies ist der Automorphismus δ von s bei U_2. Die letzte Überdeckung ist also gleich U_2 und der Satz 1 ist bewiesen.

Beweis von Satz 2. Die Automorphismen von U_2 seien mit den U_1 bis auf Inzidenzautomorphismen bezüglich a^r identisch. Dann ist natürlich die Bettische Gruppe $B^p(K, U_1)$ isomorph mit $B^p(K, U_2)$, wenn $p<r-1$ oder $p>r+1$ ist. a_i^{r+1} $(i=1, \dots, m)$ und a_j^{r-1} $(j=1, \dots, n)$ seien die Zellen von K, die mit a^r inzident sind.

i) Sei f^{r-1} ein Zyklus in U_1, der ~ 0 ist, so ist f^{r-1} auch ~ 0 in U_2. In der Tat sei f^r ein algebraischer Komplex in U_1, dessen Rand f^{r-1} ist. $t^r(a^r)$ sei $\alpha \in \mathfrak{J}$. Wir nehmen einen algebraischen Komplex F^r in U_2 auf, dessen Wert folgendes ist:

$$F^r(a^r)=(\delta_1^r)^{-1}\gamma_1^r\alpha \in \mathfrak{J} ,$$

$$F^r(a_i^r)=f^r(a_i^r) \quad \in \mathfrak{J} , \quad a_i^r \neq a^r ,$$

wo γ_1^r bzw. δ_1^r die Inzidenzautomorphismen von a^r nach a_1^{r-1} bei U_1 bzw. U_2 sind.

Die Automorphismen zwischen a^r und a_j^{r-1} $(j>1)$ bei U_1 bzw. U_2 sind also γ_i^r bzw. $\gamma_j^r(\gamma_1^r)^{-1}\delta_1^r$. Daher ist $g_uF^r=f^{r-1}$ in U_2.

ii) f^{r-1} sei ein Zyklus in U_1, der $\not\sim 0$ ist. So ist f^{r-1} auch $\not\sim 0$ in U_2. Dies folgt aus (i) und Benachbarkeitsvoraussetzung von U_1 und U_2. Aus (i) und (ii)$'$ folgt die Isomorphie von zwei Bettischen Gruppen $B^{r-1}(K, U_1)$ und $B^{r-1}(K, U_2)$.

iii) f^{r+1} sei ein Zyklus in U_1. So ist er auch ein Zyklus in U_2. Sei $f^{r+1}(a_i^{r+1})=\alpha_i \in \mathfrak{J}$, so ist nach Voraussetzung bei U_1

$$g_uf^{r+1}(a^r)=\sum_i \gamma_i^{r+1}\alpha_i=0 .$$

Der Automorphismus zwischen a_i^{r+1} und a^r bei U_2 ist

$$(\delta_1^r)^{-1}\gamma_1^r\gamma_i^{r+1} .$$

Daher ist bei U_2

$$\begin{aligned} g_uf^{r+1}(a^r) &= \sum_i (\delta_1^r)^{-1}\gamma_1^r\gamma_i^{r+1}\alpha_i \\ &= (\delta_1^r)\gamma_1^r \sum_i \gamma_i^{r+1}\alpha_i=0 . \end{aligned}$$

Für andere r-Zelle a_i^r ist der Wert von g_uf^{r+1} bei U_2 derselbe wie bei U_1. Also ist f^{r+1} auch ein Zyklus in U_2.

Aus (iii) folgt die Isomorphie von den Bettischen Gruppen $B^{r+1}(K, U_1)$ und $B^{r+1}(K, U_2)$.

iv) Sei f^r ein Zyklus in U_1, und F^r der Zyklus in U_2, der nach i) zu f^r eindeutig zugeordnet wird. Ist $f^r \sim 0$ (oder $\not\sim 0$) in U_1, so ist auch $F^r \sim 0$ (oder $\not\sim 0$) in U_2. Wir können dies leicht wie bei (ii) und (iii) beweisen. Die homomorphe Zuordnung $h: F^r \to f^r$ ist offenbar auch eineindeutig, also folgt die Isomorphie der beiden Gruppen $B^r(K, U_1)$ und $B^r(K, U_2)$.

Der Satz 3 ist eine unmittelbare Folge von Sätzen 1 und 2.

Beweis von Satz 4. M^n sei eine orientierbare Mannigfaltigkeit, U eine wesentliche Überdeckung von M^n. Die von U bestimmte Darstellung

g von $\mathfrak{J}$ in Γ ist also nicht trivial. Daher gibt es einen geschlossenen Weg w von n-Simplexen

$$T_1^n,\ T_2^n,\ \dots,\ T_i^n,\ T_1^n,$$

der durch g zu γ $(\neq I)$ von Γ zugeordnet ist.

Aus Satz 1 können wir eine neue mit U äquivalente Überdeckung U' konstruieren, welche folgende Automorphismen besitzt:

$$\begin{aligned} &(T_j^n,\ T_{j,j+1}^{n-1}) \to I, && j=1,2,\dots,i, \\ &(-T_{j,j+1}^{n-1},\ T_{j+1}^n) \to I, && j=1,2,\dots,i-1, \\ &(-T_{i_1}^{n-1},\ T_1^n) \ \ \to \gamma, \end{aligned}$$

wo $T_{i,i+1}^{n-1}$ das einzige gemeinsame Simplex zwischen T_i^n und T_{i+1}^n ist. Andere Inzidenzautomorphismen werden passend definiert wie beim Beweis des Satzes 1.

Diese Überdeckungen U' ist äquivalent mit U_1.

Nach Satz 3 ist die Bettische Gruppe $B^n(M, U')$ isomorph der Gruppe $B^n(M, U)$ von U.

Die Gruppe $B^n(M, U')$ ist aber 0.

Der Beweis dieser Tatsache wird wie folgt durchgeführt:

Sei f^n ein Zyklus in U',

$$f^n(T_k^n) = \alpha \in \mathfrak{J}, \qquad \alpha \neq 0.$$

So ist auch $f^n(T_{k+1}^n) = \alpha$ in U', weil $g_u f^n$ 0 Komplex sein muss. Dann ist

$$\begin{aligned} f^n = T_i^n &\to \alpha \\ T_1^n &\to \alpha, \qquad \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Aber der Wert von $g_u f^n$ muss für das Simplex $T_{i_1}^{n-1}$ nach dem Automorphismus zwischen T_1^n und $T_{i_1}^{n-1}$ bei U' folgendes sein.

$$\begin{aligned} g_u f^n(T_{i_1}^{n-1}) &= f^n(T_i^n) - \gamma^{-1} f^n(T_1^n) \\ &= (I-\gamma^{-1})\ \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Daher kann f^n niemals ein Zyklus sein. Somit ist der Satz 4 bewiesen.

Bemerkung. Der Satz 4 gilt auch für jede orientierbare Pseudomannigfaltigkeit.