76. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien.*[1]

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. *Einleitung.* Neuerdings habe ich eine gemeinsame Behandlungsweise der

elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen[2]	elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen[3]

Differentialgeometrien veröffentlicht. Im folgenden möchte ich eine gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Lieschen, hyperbolischen Lieschen und parabolischen Lieschen Differentialgeometrien mitteilen.

2. *Elliptische Liesche, hyperbolische Liesche und parabolische Liesche Geometrie in der Ebene.* Wir führen

pentazyklische Kreiskoordinaten $(\xi)_5$ und pentazyklische Kreiskongruenzkoordinaten $(a)_5$	*pentahyperbolische Hyperbelnkoordinaten* $(\xi)_5$ und *pentahyperbolische Hyperbelnkongruenzkoordinaten* $(a)_5$	*pentaparabolische Parabelnkoordinaten* $(\xi)_5$ und *pentaparabolische Parabelnkongruenzkoordinaten* $(a)_5$

folgendermassen ein. Es seien $(\xi)_4$ die

tetrazyklischen Kreiskoordinaten.	tetrahyperbolischen Hyperbelnkoordinaten.[4]	tetraparabolischen Parabelnkoordinaten.[5]

Setzt man

$$\xi_5 = i\sqrt{(\xi\xi)_4} = i\,, \tag{1}$$

so gilt die Identität:

$$(\xi\xi)_5 = 0\,. \tag{2}$$

Eine Gleichung von der Gestalt

$$(a\xi)_5 = 0\,, \qquad \big((aa)_5 \equiv 1\big) \tag{3}$$

stellt eine *lineare Kongruenz von ähnlichen und ähnlich gelegenen*

---

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien. Dieses „Proc.", S. 333, Abhandlung 75.

3) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien. Dieses „Proc.", S. 346, Abhandlung 77.

4) 5) Siehe die Abhandlung zitiert in der Fussnote 2).

Kreisen | *Hyperbeln* | *Parabeln*

dar. *Die Gleichung* (3) *kann man geometrisch folgendermassen deuten.*

Die Gleichung (3) lässt sich also folgendermassen umschreiben:

$$\text{(i)}\qquad \frac{(a\xi)_4}{\sqrt{(aa)_4}}=-i\frac{a_5}{\sqrt{(aa)_4}}=-i\frac{a_5}{\sqrt{1-a_5^2}}=\text{konst.}$$

d. h.

(4) $\cos(a,\xi)=\text{konst.}$ | $\cosh(a,\xi)=\text{konst.}$ | $\operatorname{cosp}(a,\xi)=\text{konst.}$

$$\text{(ii)}\qquad \frac{(a\tilde{\xi})_3+a_5\tilde{\xi}_5}{\sqrt{(aa)_3+a_5^2}}=-\frac{ia_4}{\sqrt{(aa)_3+a_5^2}}=\frac{-ia_4}{\sqrt{1-a_4^2}}=\text{konst.},$$

wobei die (ξ) so normiert sind, dass $\tilde{\xi}_4=1$ wird. Um die geometrische Bedeutung von (ii) in den Fällen $m=h$ und $m=p$ klar zu machen, setzen wir

$$(5)^{6)}\quad\left\{\begin{aligned}&\tilde{\xi}_1=\frac{2a}{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1},\qquad \tilde{\xi}_2=\frac{2imb}{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1},\\&\tilde{\xi}_3=-\frac{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2+1}{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1},\\&\tilde{\xi}_5=\frac{2\sqrt{\varepsilon}\,ri^2\sqrt{(\xi\xi)_4}}{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1}=\frac{-2\sqrt{\varepsilon}\,r}{a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1};\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \tilde{a}_n=\frac{a_n}{\sqrt{(aa)_3+a_5^2}},\qquad (n=1,2,3,5),$$

so dass (ii) zu

$$(7)\qquad (\tilde{a}\tilde{\xi})_3+\tilde{a}_5\tilde{\xi}_5=\text{konst.}=C$$

wird. Dabei kommt nach $\pm\sqrt{\varepsilon}\,r$ eine *Orientierung* in Betracht.

Setzt man von (5) in (7) ein, so folgt:

$$(8)^{7)}\qquad \left(a-\frac{\tilde{a}_1}{C+\tilde{a}_3}\right)^2-\left(mb+\frac{i\tilde{a}_2}{C+\tilde{a}_3}\right)^2-\left(\sqrt{\varepsilon}\,r-\frac{\tilde{a}_5}{C+\tilde{a}_3}\right)^2$$
$$=\frac{\tilde{a}_1^2+\tilde{a}_2^2-\tilde{a}_3^2-\tilde{a}_5^2+C^2}{(C+\tilde{a}_3)^2}=\text{konst.}.$$

Aus (4) und (8) liest man folgendes ab: *Der Inbegriff der ähnlichen und ähnlich gelegenen orientierten*

---

6) Im Falle $m=p$ $((x-a)^2=4d\cdot(y-b'))$ wird dieses zu:

$$\tilde{\xi}_1=\frac{-2a}{1-a^2-4b'd},\qquad \tilde{\xi}_2=\frac{4id}{p(1-a^2-4b'd)},\qquad \tilde{\xi}_3=-i\frac{1+a^2+4b'd}{1-a^2+4b'd},$$
$$\tilde{\xi}_5=\frac{4d\sqrt{(\xi\xi)_4}}{p(1-a^2-4b'd)}=\frac{4d}{p(1-a^2-4b'd)}.$$

7) Im Falle $m=p$ $((x-a)^2=4d\cdot(y-b'))$ wird dieses zu:

$$\left(a-\frac{\tilde{a}_1}{C+\tilde{a}_3}\right)^2+4id\frac{\tilde{a}_2}{p(C+\tilde{a}_3)}-4id\frac{\tilde{a}_5}{p(C+\tilde{a}_3)}=\frac{\tilde{a}_1^2-\tilde{a}_3^2+C^2}{(C+\tilde{a}_3)^2}=\text{konst.}.$$

Kreise, | *Hyperbeln,* | *Parabeln,*

welche von einer festen solchen um einen konstanten

Winkel | *Tangentialabstand*

(*im Sinne der parabolischen Geometrie, bei welcher das Winkelmass*

elliptisch | *hyperbolisch*[8] | *parabolisch*[9]

ist)

geneigt | *entfernt*

sind, bilden eine lineare Kongruenz von ähnlichen und ähnlich gelegenen

Kreisen. | *Hyperbeln.* | *Parabeln.*

Die in Betracht kommende Transformationsgruppe, die wir die

Liesche Gruppen zu nennen pflegen, | *h-Liesche Gruppe* nennen wollen, | *p-Liesche Gruppe* nennen wollen,

ist von *quinären orthogonalen Transformationen.*

Die zugehörige Geometrie möchte ich die

* * * | *h-Liesche* | *p-Liesche*

Geometrie in der Ebene nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist die Grösse:

$$I_{\alpha\beta}=(\alpha\beta)_5\,. \tag{9}$$

Diese Invariante kann auch folgendermassen geschrieben werden:

(10) $I_{\alpha\beta}$

$$=\frac{\cos\phi_{\alpha\beta}-\cos\phi_\alpha\cos\phi_\beta}{\sin\phi_\alpha\sin\phi_\beta} \quad\Big|\quad =\frac{\cosh\phi_{\alpha\beta}-\cosh\phi_\alpha\cosh\phi_\beta}{\sinh\phi_\alpha\sinh\phi_\beta} \quad\Big|\quad =\frac{\phi_{\alpha\beta}^2-\phi_\alpha^2-\phi_\beta^2}{2\phi_\alpha\phi_\beta}$$

$$=\frac{S_{\alpha\beta}^2-S_\alpha^2-S_\beta^2}{2S_\alpha S_\beta}\,.$$

Dabei bedeutet $\phi_{\alpha\beta}$ den

e-Winkel | *h*-Winkel | *p*-Winkel

zwischen den beiden Grund-

Kreisen | Hyperbeln | Parabeln

und ϕ_α, ϕ_β bzw. den konstanten

e-Grundwinkel | *h*-Grundwinkel | *p*-Grundwinkel

der Kongruenzen $(\alpha)_5$ und $(\beta)_\alpha$ und $S_{\alpha\beta}$ den Tangentialabstand zwischen den beiden Grund-

Kreisen | Hyperbeln | Parabeln

und S_α, S_β bzw. den konstanten

e- | *h*- | *p*-

Grundtangentialabstand.

---

8) Siehe die Abhandlung zitiert in 2), Art. 10.

9) Siehe die Abhandlung zitiert in 3).

3. *Elliptische Liesche Geometrie, hyperbolische Liesche Geometrie und parabolische Liesche Geometrie im Raume.* Von den

pentasphärischen Kugelkoordinaten	pentahyperboloidischen Hyperboloidenkoordinaten[10]	pentaparaboloidischen Paraboloidenkoordinaten[11]

$(\xi)_5$ ausgehend kann man ganz wie im Art. 2 für *orientierte, ähnliche, ähnlich gelegene*

Kugeln hexasphhärische Kugel-	Hyperboloide *hexahyperboloidische Hyperboloiden-*	Paraboloide *hexaparaboloidische Paraboloiden-*

koordinaten $(\xi)_6$, $\left((\xi\xi)_6=0\right)$ samt

hexasphärischen Kugelkomplex-	*hexahyperboloidischen Hyperboloidenkomplex-*	*hexaparaboloidischen Paraboloidenkomplex-*

koordinaten $(a)_6$ $\left((aa)_6=1\right)$ einführen.

Die in Betracht kommende Transformationsgruppe, die wir die

Liesche Gruppe zu nennen pflegen,	*h-Liesche Gruppe* nennen wollen,	*p-Liesche Gruppe* nennen wollen,

ist von *6-ären orthogonalen Tranformationen.*

Die zugehörige Geometrie möchte ich die

* * *	*h-Liesche*	*p-Liesche*

Geometrie im Raume nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist

$$I_{\alpha\beta}=(\alpha\beta)_6\,, \tag{11}$$

welche sich geometrisch wie bei (10) deuten lässt.

4. *Algebraische m-Liesche Geometrie und m-Liesche Differentialgeometrie,* $(m=e, h, p)$. Die algebraische

* * *	*h-Liesche*	*p-Liesche*

Geometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen algebraischen Lieschen Geometrie im Buch:

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) entwickeln.

Die

* * *	*h-Liesche*	*p-Liesche*

Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen Lieschen Differentialgeometrie im Buch:

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band III. Liesche Differentialkugelgeometrie,

welche in kurzem zu erscheinen ist, entwickeln.

5. *Herleitung der m-konformen Geometrie* $(m=e,h,p)$. *Adjungiert man zum*

10) Siehe Fussnote 2).

11) Siehe Fussnote 3).

Lieschen | *h-Lieschen* | *p-Lieschen*

Raume einen linearen

Kugelkomplex, | *Hyperboloidenkomplex,* | *Paraboloidenkomplex,*

so entsteht ein

konformer | *h-konformer* | *p-konformer*

Raum.

6. *Herleitung der m-Laguerreschen Geometrie* $(m=e, h, p)$. *Adjungiert man zum*

Lieschen | *h-Lieschen* | *p-Lieschen*

Raume, in welchem Berührung von orientierten

Kugeln | *Hyperboloiden* | *Paraboloiden*

$$(\alpha\xi)_6=0 \ \left((\alpha\alpha)_6=0,\ (\xi\xi)_6=0\right)$$

als vereinigtes System betrachtet wird,

eine orientierte | *ein orientiertes* | *ein orientiertes*

(*am bequemsten Null-*)

Kugel, | *Hyperboloid,* | *Paraboloid,*

so entsteht ein

Laguerrescher | *h-Laguerrescher* | *h-Laguerrescher*

Raum.