PAPERS COMMUNICATED

22. *Sur la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann.*

Par Kentaro YANO et Yosio MUTÔ.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., April 12, 1941.)

La géométrie conforme des espaces de Riemann a été tout récemment étudiée par MM. A. Fialkow[1], V. Modesitt[2], S. Sasaki[3] et les présents auteurs[4]. Nous avons déjà remarqué ailleurs[5] que pour étudier la géométrie conforme des espaces de Riemann, il est bien commode d'y introduire la connexion conforme normale et d'utiliser le repère de M. O. Veblen[6].

Le but de la présente Note est d'étudier la géométrie conforme des espaces de Riemann à l'aide de la connexion conforme normale ainsi introduite et du repère mobile de M. O. Veblen. Le détail sera publié ailleurs.

§ 1. *Les espaces à connexion conforme normale.*

Considérons un espace à connexion conforme et prenons un repère mobile $[A_0, A_1, \dots, A_n, A_\infty]$, à chaque point de l'espace, satisfaisant aux relations

$$(1.1)\quad A_0A_0=A_\infty A_\infty=A_0A_\lambda=A_\infty A_\lambda=0\,,\quad A_0A_\infty=-1\,,\quad A_\lambda A_\mu=g_{\lambda\mu}{}^{7)},$$

A_0 étant le point courant de l'espace. Alors la connexion conforme sera représentée par les formules de la forme

1) A. Fialkow, Conformal geodesics, Trans. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 443–473. The conformal theory of curves, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **26** (1940), 437–439.

2) V. Modesitt, Some singular properties of conformal transformations between Riemannian spaces, Amer. Journal of Math. **60** (1938), 325–336.

3) S. Sasaki, Some theorems on conformal transformations of Riemannian spaces, Proc. Physico-Math. Soc. Japan. **18** (1936), 572–578.

4) Y. Mutô, On some properties of umbilical points of hypersurfaces, Proc. **22** (1940), 79–82.

K. Yano, Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 247–252. Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 340–344. Conformally separable quadratic differential forms, Proc. **16** (1940), 83–86. Sur quelques propriétés conformes de V_l dans V_m dans V_n, Proc. **16** (1940), 173–177.

5) K. Yano, Sur la théorie des espaces à connexion conforme, Journal of the Faculty of Science. Tokyo Imp. Univ. **4** (1939), 1–59.

6) O. Veblen, Formalism for conformal geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21** (1935), 168–173.

7) Les indices parcourent les valeurs respectives suivantes:

$\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, \dots, n,$ $\qquad h, i, j, k, \dots = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{m},$

$A, B, C, \dots = 0, 1, 2, \dots, n, \infty$ $\qquad K, L, M, \dots = \dot{0}, \dot{1}, \dots, \dot{m}, \dot{\infty},$

$\qquad P, Q, R, \dots = \dot{m}+\dot{1}, \dots, \dot{n}.$

$$(1.2) \qquad dA_B = \omega_B^C A_C\,,$$

où les formes de Pfaff ω_B^C satisfont aux équations

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \omega_0^\infty = \omega_\infty^0 = 0\,, & \omega_0^\lambda g_{\lambda\mu} - \omega_\mu^\infty = 0\,, \quad \omega_\infty^\lambda g_{\lambda\mu} - \omega_\mu^0 = 0\,, \\ \omega_0^0 + \omega_\infty^\infty = 0\,, & \omega_\mu^\lambda g_{\lambda\nu} + \omega_\nu^\lambda g_{\lambda\mu} = dg_{\mu\nu}\,. \end{cases}$$

Parmi les repères satisfaisant aux (1.1), on peut choisir une famille pour laquelle on a $\omega_0^\lambda = du^\lambda$. Un tel repère s'appelle *repère semi-naturel.* Dans ce cas, en posant

$$(1.4) \qquad \omega_0^0 = p_\nu du^\nu, \quad \omega_B^A = \omega_{B\nu}^A du^\nu, \quad \Pi_{B\nu}^A = \omega_{B\nu}^A - \delta_B^A p_\nu\,, \quad \Pi_{B0}^A = \delta_B^A\,,$$

on obtient

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \Pi_{\mu\nu}^0 = \omega_{\mu\nu}^0\,, \quad \Pi_{\infty\nu}^0 = \Pi_{0\nu}^\infty = 0\,, \quad \Pi_{0\nu}^\lambda = \delta_\nu^\lambda\,, \\ \Pi_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} - \delta_\mu^\lambda p_\nu - \delta_\nu^\lambda p_\mu + g^{\lambda\alpha} p_\alpha g_{\mu\nu}\,, \\ \Pi_{\mu\nu}^\infty = g_{\mu\nu}\,, \quad \Pi_{\infty\nu}^\infty = -2p_\nu\,, \quad \Pi_{\infty\nu}^\lambda = g^{\lambda\mu} \Pi_{\mu\nu}^0\,, \quad \Pi_{B0}^A = \delta_B^A\,, \end{cases}$$

où l'on désigne par $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ les symboles de Christoffel. Cela étant, la courbure de l'espace est définie par

$$(1.6) \qquad \underset{2\,1}{dd} A_B - \underset{1\,2}{dd} A_B = \Omega_{B\nu\omega}^A \underset{1}{d} u^\nu \underset{2}{d} u^\omega A_A\,.$$

Si la condition $\Omega_{0\nu\omega}^\lambda = \Pi_{\nu\omega}^\lambda - \Pi_{\omega\nu}^\lambda = 0$ est satifaite, l'espace est dit *sans torsion,* ce que nous supposerons dans la suite. Une connexion conforme dont le tenseur de courbure $C_{A\nu\omega}^B = \Omega_{A\nu\omega}^B - \delta_A^B \Omega_{0\nu\omega}^0$ satisfont à la condition $C_{\mu\nu\lambda}^\lambda = 0$ sera dite *normale.* Si la connexion est normale, on peut, parmi les repères semi-naturels, choisir un repère par rapport auquel les composantes de la connexion sont

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \Pi_{\mu\nu}^0 = -\dfrac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \dfrac{g_{\mu\nu} R}{2(n-1)(n-2)}\,, \\ \Pi_{\infty\nu}^\lambda = -\dfrac{R^\lambda{}_\nu}{n-2} + \dfrac{\delta_\nu^\lambda R}{2(n-1)(n-2)}\,, \\ \Pi_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}, \quad \Pi_{\mu\nu}^\infty = g_{\mu\nu}\,, \quad \Pi_{0\nu}^0 = \Pi_{\infty\nu}^\infty = \Pi_{\infty\nu}^0 = \Pi_{0\nu}^\infty = 0\,, \\ \Pi_{0\nu}^\lambda = \delta_\nu^\lambda\,, \quad \Pi_{B0}^A = \delta_B^A\,, \end{cases}$$

où $R_{\mu\nu}$ et R sont le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure formés avec les $g_{\mu\nu}$ respectivement et $C_{\mu\nu\omega}^\lambda$ coïncident avec le tenseur conforme de courbure de M. Weyl. Nous appelons un tel repère *le repère de M. O. Veblen.* On voit bien que si l'on a un espace de Riemann dont le tenseur fondamental est $g_{\mu\nu}$, on peut lui associer une connexion conforme normale, les composantes de la connexion étant parfaitement déterminées en termes de $g_{\mu\nu}$.

§ 2. *Théorie des courbes*[1].

En employant le paramètre projectif t défini par

$$(2.1)\qquad \{t, s\} = \frac{\dfrac{d^3t}{ds^3}}{\dfrac{dt}{ds}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{d^2t}{ds^2}}{\dfrac{dt}{ds}}\right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\delta^2 u^\mu}{\delta s^2} \frac{\delta^2 u^\nu}{\delta s^2} - \Pi^0_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds}$$

où s désigne l'arc de la courbe et $\delta/\delta s$ la dérivée covariante le long de la courbe, nous avons obtenu les formules de Frenet dans la géométrie de la connexion conforme,

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \underset{(0)}{S} = \dfrac{dt}{ds} A_0, \quad \underset{(1)}{S} = \dfrac{d}{dt} \underset{(0)}{S}, \quad \underset{(2)}{S} = \dfrac{d}{dt} \underset{(1)}{S}, \quad \dfrac{d}{dt} \underset{(2)}{S} = -\overset{3}{\varkappa} \underset{(3)}{S}, \\ \dfrac{d}{dt} \underset{(3)}{S} = -\overset{3}{\varkappa} \underset{(0)}{S} + \overset{4}{\varkappa} \underset{(4)}{S}, \quad \dfrac{d}{dt} \underset{(4)}{S} = -\overset{4}{\varkappa} \underset{(3)}{S} + \overset{5}{\varkappa} \underset{(5)}{S}, \; \ldots, \; \dfrac{d}{dt} \underset{(\infty)}{S} = -\overset{\infty}{\varkappa} \underset{(n)}{S}, \end{cases}$$

où $\underset{(0)}{S}$ et $\underset{(2)}{S}$ sont des points et $\underset{(1)}{S}, \underset{(3)}{S}, \ldots, \underset{(n)}{S}, \underset{(\infty)}{S}$ n sphères unitaires et orthogonales entre elles qui passent par les points $\underset{(0)}{S}$ et $\underset{(2)}{S}$. En partant de ces formules, on peut obtenir les formules conformes de Frenet pour une courbe dans un espace de Riemann,

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \underset{1}{J^\lambda} = \dfrac{du^\lambda}{ds}, \quad -\overset{3}{k} \underset{2}{J^\lambda} = V^\lambda, \quad \dfrac{D}{Ds} \underset{2}{J^\lambda} = \overset{4}{k} \underset{3}{J^\lambda}, \\ \dfrac{D}{Ds} \underset{3}{J^\lambda} = -\overset{4}{k} \underset{2}{J^\lambda} + \overset{5}{k} \underset{4}{J^\lambda}, \; \ldots, \; \dfrac{D}{Ds} \underset{n}{J^\lambda} = -\overset{n+1}{k} \underset{n-1}{J^\lambda}, \end{cases}$$

où

$$g_{\lambda\mu} \underset{\alpha}{J^\lambda} \underset{\beta}{J^\mu} = \delta_{\alpha\beta},$$

$$V^\lambda = \frac{\delta^3 u^\lambda}{\delta s^3} + \frac{du^\lambda}{ds} g_{\mu\nu} \frac{\delta^2 u^\mu}{ds^2} \frac{\delta^2 u^\nu}{ds^2} + \frac{du^\lambda}{ds} \frac{R_{\mu\nu}}{n-2} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\nu}{ds} - \frac{R^\lambda{}_\nu}{n-2} \frac{du^\nu}{ds},$$

et

$$\frac{D}{Ds} \underset{2}{J^\lambda} = \frac{\delta}{\delta s} \underset{2}{J^\lambda} - \underset{1}{J^\lambda} g_{\mu\nu} \left(\frac{\delta}{\delta s} \underset{2}{J^\mu} \right) \underset{1}{J^\nu}$$

par exemple. Ces formules coïncident bien avec celles qui sont déjà obtenues par un des présents auteurs[2]. Les courbes pour lesquelles $V^\lambda = 0$ s'appellent circonférences généralisées.

---

1) A. Fialkow, The conformal theory of curves, déjà cité.

Y. Mutô, On the generalized circles in the conformally connected manifold, Proc. **15** (1939), 23-26.

S. Sasaki, On the theory of curves in a curved conformal spaces, Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **27** (1939), 392-409.

K. Yano, Sur les circonférences généralisées dans les espaces à connexion conforme, Proc. **14** (1938), 329-332. Sur la théorie des espaces à connexion conforme, déjà cité.

2) K. Yano, Sur la connexion de Weyl-Hlavatý et ses applications à la géométrie conforme. Proc. Physico-Math. Soc. Japan. **22** (1940), 595-621.

§ 3. *Les sous-espaces dans un espace à connexion conforme*[1].

Un sous-espace à m dimensions étant défini par les équations paramétriques $u^\lambda(u^i)$, nous allons introduire un repère $[A_{\dot 0}, A_i, A_P, A_{\dot\infty}]$ par les formules

$$\text{(3.1)}\quad \begin{cases} A_{\dot 0} = A_0 , \\ A_i = \qquad B_i^{\cdot\lambda} A_\lambda , \\ A_P = B_P^{\cdot 0} A_0 + B_P^{\cdot\lambda} A_\lambda , \\ A_{\dot\infty} = \dfrac{1}{2} B_P^{\cdot 0} B_P^{\cdot 0} A_0 + B_P^{\cdot 0} B_P^{\cdot\lambda} A_\lambda + A_\infty , \end{cases}$$

où

$$B_i^{\cdot\lambda} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^i} , \quad g_{\lambda\mu} B_j^{\cdot\lambda} B_P^{\cdot\mu} = 0 \quad \text{et} \quad g_{\lambda\mu} B_P^{\cdot\lambda} B_Q^{\cdot\mu} = \delta_{PQ} .$$

Alors, les sphères $A_{\dot 0}$, A_i, A_P et $A_{\dot\infty}$ satisfont aux équations

$$\text{(3.2)}\quad \begin{cases} A_{\dot 0} A_{\dot 0} = A_{\dot\infty} A_{\dot\infty} = A_{\dot 0} A_i = A_{\dot\infty} A_i = 0 , \quad A_{\dot 0} A_P = A_i A_P = A_{\dot\infty} A_P = 0 , \\ A_{\dot 0} A_{\dot\infty} = -1 , \quad A_j A_k = g_{jk} = g_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} , \quad A_P A_Q = \delta_{PQ} . \end{cases}$$

Pour déterminer $B_P^{\cdot 0}$, nous supposons que la moyenne de $dA_{\dot 0} dA_P$ par rapport à du^i s'annule. Alors, on obtiendra

$$\text{(3.3)}\quad B_P^{\cdot 0} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{m} g^{jk} H_{jk}^{\cdot\cdot\alpha} \right) B_P^{\cdot\beta} = \frac{1}{m} H^l_{\cdot lP} ,$$

où nous avons posé

$$\text{(3.4)}\quad \begin{cases} H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = \dfrac{\partial^2 u^\lambda}{\partial u^j \partial u^k} + \left\{ {}^{\lambda}_{\mu\nu} \right\} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} - B_i^{\cdot\lambda} \left\{ {}^{i}_{jk} \right\} , \\ g_{\alpha\beta} H_{jk}^{\cdot\cdot\alpha} B_P^{\cdot\beta} = H_{jkP} \quad \text{et} \quad H^i_{\cdot kP} = g^{ij} H_{jkP} , \end{cases}$$

$\left\{ {}^{i}_{jk} \right\}$ étant les symboles de Christoffel formés avec les g_{jk}. $B_P^{\cdot 0}$ etant ainssi déterminé, on obtient

$$dA_{\dot 0} dA_P = - g_{\lambda\mu} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_P^{\cdot\mu} du^j du^k \quad \text{où} \quad M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{m} g_{jk} g^{ih} H_{ih}^{\cdot\cdot\lambda} .$$

Le tenseur $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ joue le rôle du second tenseur fondamental[2].

§ 4. *La connexion conforme induite sur le sous-espace.*

La connexion conforme de l'espace ambiant peut être, par rapport au repère $[A_{\dot 0}, A_i, A_P, A_{\dot\infty}]$, exprimée comme il suite:

$$\text{(4.1)}\quad \begin{cases} dA_{\dot 0} = \qquad du^i A_i , \\ dA_j = \Pi^{\dot 0}_{jk} du^k A_{\dot 0} + \Pi^i_{jk} du^k A_i + \Pi_{jkP} du^k A_P + \Pi^{\dot\infty}_{jk} du^k A_{\dot\infty} , \\ dA_P = \Pi^{\dot 0}_{Pk} du^k A_{\dot 0} + \Pi^i_{Pk} du^k A_i + \Pi_{PQk} du^k A_Q , \\ dA_{\dot\infty} = \qquad \Pi^i_{\dot\infty k} du^k A_i + \Pi_{\dot\infty Pk} du^k A_P . \end{cases}$$

1) K. Yano et Y. Mutô, Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme. Proc. **16** (1940), 266–273.

2) K. Yano, Sur les équations de Gauss ......, déjà cité.

En calculant ces composantes, on trouve

$$
(4.2)\quad \begin{cases}
\Pi^{0}_{jk} = -\dfrac{1}{n-2} R_{\mu\nu} B_{j}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} + \dfrac{1}{2(n-1)(n-2)} g_{jk} R \\
\qquad - \dfrac{1}{m} H^{l}_{\cdot lP} H_{jkP} + \dfrac{1}{2m^2} H^{l}_{\cdot lP} H^{m}_{\cdot mP} g_{jk} , \\
\Pi^{\dot{0}}_{Pk} = \dfrac{1}{m} H^{l}_{\cdot lP\,;\,k} - \dfrac{1}{n-2} R_{\mu\nu} B_{P}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} - \dfrac{1}{m} L_{PQk} H^{l}_{\cdot lQ} , \\
\Pi^{i}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} , \quad \Pi_{jkP} = M_{jkP} , \quad \Pi^{i}_{Pk} = -g^{ij} M_{jkP} , \quad \Pi_{PQk} = L_{PQk} , \\
\Pi^{\dot{\infty}}_{jk} = g_{jk} , \quad \Pi^{\dot{i}}_{\infty k} = g^{ij} \Pi^{\dot{0}}_{jk} , \quad \Pi_{\dot{\infty} Pk} = \Pi^{\dot{0}}_{Pk} ,
\end{cases}
$$

où nous avons posé

$$
M_{jkP} = g_{\lambda\mu} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} B_{P}^{\cdot\mu} \quad \text{et} \quad L_{PQk} = g_{\lambda\mu} B_{P\,;\,k}^{\cdot\lambda} B_{Q}^{\cdot\mu} ,
$$

le point-virgule désignant la dérivée covariante.

Une considération géométrique nous conduit à définir la connexion conforme induite sur le sous-espace par

$$
(4.3)\quad \begin{cases}
\delta A_{\dot{0}} = du^{i} A_{i} , \\
\delta A_{j} = \Pi^{\dot{0}}_{jk} du^{k} A_{\dot{0}} + \Pi^{i}_{jk} du^{k} A_{i} + \Pi^{\dot{\infty}}_{jk} du^{k} A_{\dot{\infty}} , \\
\delta A_{\dot{\infty}} = \Pi^{\dot{i}}_{\infty k} du^{k} A_{i} .
\end{cases}
$$

§ 5. *Les équations de Gauss et de Codazzi.*

En définissant le tenseur de courbure de l'espace plongé par

$$
(5.1)\quad \underset{21}{\delta\delta} A_{K} - \underset{12}{\delta\delta} A_{K} = \Omega^{L}_{Kkh} \underset{1}{d}u^{k} \underset{2}{d}u^{h} A_{L} ,
$$

on obtient

$$
(5.2)\quad \Omega^{\dot{0}}_{jkh} + \frac{1}{m} M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{l}_{\cdot l\lambda\,;\,h} + M_{jk}^{\cdot\cdot\mu} B_{h}^{\cdot\nu} \Pi^{0}_{\mu\nu} - \frac{1}{m} M_{jh}^{\cdot\cdot\lambda} H^{l}_{\cdot l\lambda\,;\,k}
$$
$$
\qquad - M_{jh}^{\cdot\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} \Pi^{0}_{\mu\nu} = B^{\mu\nu\omega}_{jkh} \Omega^{0}_{\mu\nu\omega} - \frac{1}{m} H^{l}_{\cdot l\lambda} B^{\mu\nu\omega}_{jkh} C^{\lambda}_{\mu\nu\omega} ,
$$

$$
(5.3)\quad \Omega^{i}_{jkh} - M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} M^{i}_{\cdot h\lambda} + M_{jh}^{\cdot\cdot\lambda} M^{i}_{\cdot k\lambda} = B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} C^{\lambda}_{\mu\nu\omega} ,
$$

$$
(5.4)\quad M_{jkP\,;\,h} - M_{jhP\,;\,k} + M_{jkQ} L_{QPh} - M_{jhQ} L_{QPk}
$$
$$
\qquad + g_{jk} \left(\frac{1}{m} H^{l}_{\cdot lP\,;\,h} + B_{P}^{\cdot\mu} B_{h}^{\cdot\nu} \Pi^{0}_{\mu\nu} - \frac{1}{m} L_{PQh} H^{l}_{\cdot lQ} \right)
$$
$$
\qquad - g_{jh} \left(\frac{1}{m} H^{l}_{\cdot lP\,;\,k} + B_{P}^{\cdot\mu} B_{k}^{\cdot\nu} \Pi^{0}_{\mu\nu} - \frac{1}{m} L_{PQk} H^{l}_{\cdot lQ} \right)
$$
$$
\qquad = B_{P\lambda} B^{\mu\nu\omega}_{jkh} C^{\lambda}_{\mu\nu\omega} ,
$$

où

$$H^{l}_{\cdot l\lambda}=g_{\lambda\mu}g^{lm}H_{lm}^{\cdot\cdot\mu}\,,\quad M^{i}_{\cdot h\lambda}=g_{\lambda\mu}g^{ik}M_{kh}^{\cdot\cdot\mu}\,,\quad B^{\mu\nu\omega}_{jkh}=B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}B_{h}^{\cdot\omega}\,,$$

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}=B^{i}_{\cdot\lambda}B^{\mu\nu\omega}_{jkh}\,,\quad B^{i}_{\cdot\lambda}=g^{ij}g_{\lambda\mu}B_{j}^{\cdot\mu}\quad \text{et}\quad B_{P\lambda}=g_{\lambda\mu}B_{P}^{\cdot\mu}\,.$$

Les équations (5.3) sont les équations de Gauss et (5.4) celles de Codazzi. On peut en réduire facilement les équations de Gauss et de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Des équations (5.3), on obtient le

Théorème I: La condition nécessaire et suffisante pour que la connexion induite sur le sous-espace dans espace à connexion conforme normale soit aussi normale est que $C^{\lambda}_{\mu\nu\omega}$ et $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ satisfassent aux équations

$$B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\mu\nu\omega}=M_{jm}^{\cdot\cdot\lambda}M^{m}_{\cdot k\lambda}\,,\tag{5.5}$$

où

$$B^{\omega}_{\lambda}=B^{i}_{\cdot\lambda}B_{i}^{\cdot\omega}\quad \text{et}\quad B^{\mu\nu}_{jk}=B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\nu}\,.$$

Si le sous-espace est une hypersurface, les équations (5.5) nous donnent $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0$, donc on a le

Théorème II[1]*: La condition nécessaire et suffisante pour que la connexion induite sur une hypersurface dans un espace à connexion conforme normale soit aussi normale est que l'hypersurface soit totalement ombiliqué et $B^{\omega}_{\lambda}B^{\mu\nu}_{jk}C^{\lambda}_{\mu\nu\omega}=0$.*

§ 6. *Les courbes sur le sous-espace.*

(i) *Les paramètres projectifs.*

Considérons une courbe $u^{i}(\tau)$ sur le sous-espace où τ est un paramètre projectif quand on la regarde comme étant celle du sous-espace. Quand on la regarde comme celle de l'espace ambiant, on désigne par t le paramètre projectif. La relation entre deux paramètres projectifs t et τ sont donnée par

$$\{t,s\}=\{\tau,s\}+\frac{1}{2}M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M_{hl\lambda}\frac{du^{j}}{ds}\frac{du^{k}}{ds}\frac{du^{h}}{ds}\frac{du^{l}}{ds}\tag{6.1}$$

où $\{t,s\}$ et $\{\tau,s)$ désignent les dérivées schwarziennes. Donc, nous avons le

Théorème III: La condition nécessaire et suffisante pour que les deux paramètres projectifs t et τ coïncident toujours à une transformation projective près est que

$$M_{(jk}^{\cdot\cdot\lambda}M_{hl)\lambda}=0\,.\tag{6.2}$$

Corollaire: Sur un sous-espace totalement ombiliquée, deux paramètres projectifs t et τ coïncident toujours.

(ii) *Les circonférences généralisées sur le sous-espace.*

Par un calcul direct, on obtient les équations suivantes:

---

1) S. Sasaki, Geometry of conformal connexion. Sci. Rep. Tôhoku Imp. Univ. **28** (1940), 219–276. On a remarkable property of umbilical hypersurfaces in the geometry of the normal conformal connexion. ibidem. **29** (1940), 412–422.

$$(6.3)\qquad B^{i}_{\cdot\lambda}\left(\frac{\delta^3u^\lambda}{\delta s^3}+\frac{du^\lambda}{ds}g_{\mu\nu}\frac{\delta^2u^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta^2u^\nu}{\delta s^2}-\frac{du^\lambda}{ds}\Pi^{0}_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds}+\Pi^{\lambda}_{\infty\nu}\frac{du^\nu}{ds}\right)$$

$$=\frac{\delta^3u^i}{\delta s^3}+\frac{du^i}{ds}g_{jk}\frac{\delta^2u^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2u^k}{\delta s^2}-\frac{du^i}{ds}\Pi^{\dot 0}_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}$$

$$+\Pi^{i}_{\cdot\infty k}\frac{du^k}{ds}-M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot h\lambda}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}$$

$$+\frac{du^i}{ds}M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M_{hl\lambda}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}\frac{du^l}{ds},$$

$$(6.4)\qquad B_{P\lambda}\left(\frac{\delta^3u^\lambda}{\delta s^3}+\frac{du^\lambda}{ds}g_{\mu\nu}\frac{\delta^2u^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta^2u^\nu}{\delta s^2}-\frac{du^\lambda}{ds}\Pi^{0}_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{ds}\frac{du^\nu}{ds}+\Pi^{\lambda}_{\infty\nu}\frac{du^\nu}{ds}\right)$$

$$=3M_{jkP}\frac{\delta^2u^j}{\delta s^2}\frac{du^k}{ds}+B_{P\lambda}M_{jk;\,h}^{\cdot\cdot\lambda}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}+\Pi^{\dot 0}_{Pk}\frac{du^k}{ds}.$$

Le sous-space sur lequel on a

$$\delta^{l}_{(m}M_{ij}^{\cdot\cdot\lambda}M_{kh)\lambda}=g_{(hm}M_{ij}^{\cdot\cdot\lambda}M^{l}_{\cdot k)\lambda}\quad\text{et par suite}\quad M_{(ij}^{\cdot\cdot\lambda}M_{kh)\lambda}=g_{(ij}g_{kh)}M$$

étant appelé sous-espace quasi-ombiliqué, on obtient

Théorème IV: Une circonférence généralisée de l'espace ambiant sur un sous-espace totalement quasi-ombiliqué est aussi une circonférence généralisée du sous-espace.

Corollaire: Une circonférence généralisée de l'espace ambiant sur un sous-espace totalement ombiliqué est aussi une circonférence généralisée du sous-espace.

Théorème V: La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les circonférences généralisées d'une hypersurface soient toujours les circonférences généralisées de l'espace ambiant est que l'hypersurface soit totalement ombiliquée.

(iii) *Les courbes autoconcourantes sur le sous-espace.*

On peut définir les courbes autoconcourantes de M. Haimovici par

$$(6.5)\qquad \frac{d^3\rho A_{\dot 0}}{dt^3}A_{\dot 0}=0\quad\text{et}\quad\frac{d^3\rho A_{\dot 0}}{dt^3}A_i=0.$$

Les équations des courbes autoconcourantes étant

$$(6.6)\qquad \frac{\delta^3u^i}{\delta s^3}+\frac{du^i}{ds}g_{jk}\frac{\delta^2u^j}{\delta s^2}\frac{\delta^2u^k}{\delta s^2}-\frac{du^i}{ds}\Pi^{\dot 0}_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}+\Pi^{i}_{\cdot\infty k}\frac{du^k}{ds}$$

$$-M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot h\lambda}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}$$

$$+\frac{du^i}{ds}M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M_{hl\lambda}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}\frac{du^l}{ds}=0,$$

on a le

Théorème VI: La condition nécessaire et suffisante pour que toutes *les circonférences généralisées du sous-espace soient les courbes autoconcourantes du sous-espace est que le sous-espace soit quasi-ombiliqué.*

Corollaire : Sur un sous-espace totalement ombiliqué, les circonférences généralisées et les courbes autoconcourantes coïncident toujours.

§ 7. *Les sous-espaces à deux dimensions.*

En appelant ombilic du second ordre, un point où $H_{jk}^{;;\lambda}=g_{jk}H^{\lambda}$ et $H_{jk}^{;;\lambda}{}_{;h}=g_{jk}H^{\lambda}_{;h}$ sont valables, on obtient le

Théorème VII : Etant donnés, dans un espace de Riemann, deux directions et un vecteur orthogonal à ces directions en un point fixe, il existe toujours un sous-espace à deux dimensions passant par ce point et tangent aux deux directions données qui a ce point comme ombilic du second ordre, le vecteur donné étant le vecteur de courbure en ce point.

Ce théorème est très utile pour étudier les propriétés des circonférences généralisées. Enfin, on démontre un théorème analogue à celui de M. J. A. Schouten sur le sous-espace à deux dimensions.

Théorème VIII : La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe toujours un sous-espace à deux dimensions totalement ombiliqué passant par n'importe quel point et étant tangent aux deux directions arbitraires en ce point et de plus dont le vecteur de courbure moyenne est désigné a priori est que l'espace ambiant soit conforme à un espace euclidien.