# 73. Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien, 2[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

**1.** *Einleitung.* Im ersten Abschnitt[2] habe ich die tetrazyklischen und pentasphärischen Koordinaten zum Falle der

| Kreise | rechtwinkligen Hyperbeln | Parabeln[3] |
|---|---|---|

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

| | | |
|---|---|---|
| $m=i$, $i^2=-1$ | $m=h$, $h^2=+1$ | $m=p=$ Infinitesimale, $p^2=0$, $-p^2b=2d=$ endlich, $\sqrt{\varepsilon}\,r=ipb$ |

und zum Falle der

| Kugeln | rechtwinkligen Hyperboloide | Paraboloide[4] |
|---|---|---|

$$m^2(x-a)^2-(y-b)^2-\epsilon(z-c)^2=\varepsilon r^2$$

| | | |
|---|---|---|
| $\epsilon=+1$, $m=i$ | $\epsilon=+1$, $m=h$ | $\epsilon=\pm 1$, $m=p=$ Infinitesimale, $\sqrt{\varepsilon}\,r=\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a$ : endlich |

verallgemeinert.

Im Folgenden möchte ich die genannten Koordinaten zum Falle der allgemeinsten ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte und Konikoide verallgemeinern.

**2.** *Die elliptischen, hyperbolischen und parabolischen binären komplexen Zahlen.* Wir wollen die binären komplexen Zahlen

$$(1) \qquad \begin{cases} z=x+jy, & (j^2=\mu+\nu j), \\ \bar{z}=x+\bar{j}y, & (\bar{j}^2=\mu+\nu\bar{j}), \end{cases} \qquad (j+\bar{j}=\nu)$$

zu Grunde legen, wobei $x, y, \mu$ und $\nu$ relle Zahlen sind.

Die

| elliptischen | hyperbolischen | parabolischen |
|---|---|---|

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Proc. **16** (1940), 333.

3) D. h. $(x-a)^2=4d\cdot(y-b')$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $2d=-bp^2$, $\varepsilon=+1$.

4) D. h. $(y-b)^2+\epsilon(z-c)^2=4d\cdot(x-a')$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a$, $\varepsilon=-1$.

komplexen Zahlen entsprechen dem Sonderfall:

| | | |
|---|---|---|
| $\mu=-1, \quad \nu=0.$ | $\mu=+1, \quad \nu=0.$ | $\mu=0, \quad \nu=0.$ |

Diejenigen binären komplexen Zahlen $z=x+jy$, für welche

| | | |
|---|---|---|
| $\nu^2+4\mu<0$ | $\nu^2+4\mu>0$ | $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = Infinitesimale |

ist, möchte ich die

| | | |
|---|---|---|
| *elliptischen* | *hyperbolischen* | *parabolischen* |

*binären komplexen Zahlen* nennen. Dazu haben wir die folgenden Formeln:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} z=x+jy=\rho\,(\operatorname{cosj}\theta+j\operatorname{sinj}\theta)=\rho e^{j\theta}, \\ \bar{z}=x+\bar{j}y=\rho\,(\operatorname{cosj}\theta+\bar{j}\operatorname{sinj}\theta)=\rho e^{-j\theta}, \end{cases}$$

wobei

$$\text{(3)} \qquad \rho=\sqrt{x^2+\nu xy-\mu y^2},$$

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \operatorname{sinj}\theta=\dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j-\nu}, \quad \operatorname{cosj}\theta=\dfrac{j(e^{j\theta}+e^{-j\theta})-\nu e^{j\theta}}{2j-\nu}, \\ \dfrac{1}{2}\left\{\operatorname{cosj}(+\psi)+\operatorname{cosj}(-\psi)\right\}=\dfrac{e^{j\psi}+e^{-j\psi}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{cosj}^2\theta+\nu\operatorname{cosj}\theta\operatorname{sinj}\theta-\mu\operatorname{sinj}^2\theta=1$$

ist.

**3.** *Die zu Grunde liegenden N. E. parabolischen Geometrien.* Hinsichtlich der Längen- und Winkelmassbestimmung ist die folgende Systematik naheliegend:

| Länge / Winkel | Elliptisch | Parabolisch | Hyperbolisch |
|---|---|---|---|
| Elliptisch | EE-Geom. | PE-Geom. | HE-Geom. |
| Parabolisch | EP-Geom. | PP-Geom. | HP-Geom. |
| Hyperbolisch | EH-Geom. | PH-Geom. | HH-Geom. |

Dabei ist EE-Geometrie = elliptische Geometrie, PE-Geometrie = parabolische Geometrie, HE-Geometrie = hyperbolische Geometrie. Unsren Geometrien liegen die folgenden drei Euklidischen und N. E. Geometrien zu Grunde:

| | |
|---|---|
| $\nu^2+4\mu<0$: | PE-Geometrie, |
| $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = Infinitesimale: | PP-Geometrie, |
| $\nu^2+4\mu>0$: | PH-Geometrie. |

**4.** *Die Winkelmassbestimmungen.* Man betrachte, der Einfachheit halber, rechwinklige Cartesische Koordinaten in der Ebene der

| | | |
|---|---|---|
| PE-Geometrie. | PH-Geometrie. | PP-Geometrie. |

Die unendlichfernen Punkte

$$A_1(j:1:0) \quad \text{und} \quad A_2(\bar{j}:1:0)$$

wollen wir im Falle

| $\nu^2+4\mu<0$ | $\nu^2+4\mu>0$ | $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = Infinitesimale |
|---|---|---|

die *absoluten*

| *Ellipsenpunkte* | *Hyperbelpunkte* | *Parabelpunkte* |
|---|---|---|

nennen.

Den Winkel zwischen den beiden orientierten Geraden $g_1, g_2$ definieren wir durch die Formel:

$$\varphi=\frac{1}{j}\log \mathrm{D.\,V.}\,(\overline{PA_1}\overline{PA_2}, g_1\, g_2)\,, \tag{6}$$

wobei $P=(g_1, g_2)$ ist. Wenn die orientierte Gerade $g_1$ die Anfangsgerade ist, dann besteht im Falle

| $\nu^2+4\mu<0$ | $\nu^2+4\mu>0$ | $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = Infinitesimale |
|---|---|---|

die folgende Zuordnung:

| | | |
|---|---|---|
| $\sphericalangle(g_1, g_2)$ | $g_2:\ \overline{PA_2}\quad g_1\quad \overline{PA_1}$ | $g_2:\ \overline{PA_2}\quad g_1\quad \overline{PA_1}$ |
| $\equiv\varphi$ (mod. $2x$). | $\varphi:\ -\infty\quad 0\quad +\infty$ | $\varphi:\ -\infty\quad 0\quad +\infty$ |
| | $(\lim\limits_{\nu^2+4\mu\to 0}\overline{PA_2}=\overline{PA_1})$ | |

Also ist die *Massbestimmung des Winkels*

| *elliptisch.* | *hyperbolisch.* | *parabolisch.* |
|---|---|---|

**5.** *Trigonometrie.* $\mathrm{sinj}\,\varphi$ und $\mathrm{cosj}\,\varphi$ habe ich durch (4) definiert. Es ist nicht schwer die folgenden trigonometrischen Formeln von Capelli zu verifizieren:

$$\begin{cases} \mathrm{sinj}\,(\varphi_1+\varphi_2)=\mathrm{cosj}\,\varphi_1\,\mathrm{sinj}\,\varphi_2+\mathrm{cosj}\,\varphi_2\,\mathrm{sinj}\,\varphi_1+\nu\,\mathrm{sinj}\,\varphi_1\,\mathrm{sinj}\,\varphi_2\,, \\ \mathrm{cosj}\,(\varphi_1+\varphi_2)=\mathrm{cosj}\,\varphi_1\,\mathrm{cosj}\,\varphi_2+\mu\,\mathrm{sinj}\,\varphi_1\,\mathrm{sinj}\,\varphi_2\,, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \mathrm{sinj}\,(-\varphi)=-\mathrm{sinj}\,(\varphi)\,; \qquad \mathrm{cosj}\,(-\varphi)=\mathrm{cosj}\,\varphi+\nu\,\mathrm{sinj}\,\varphi\,, \\ \mathrm{cosj}^2\,\varphi+\nu\,\mathrm{cosj}\,\varphi\,\mathrm{sinj}\,\varphi-\mu\,\mathrm{sinj}^2\,\varphi=1\,. \end{cases} \tag{8}$$

Wir definieren $\mathrm{tanj}\,\varphi$ und $\mathrm{cotj}\,\varphi$ durch die Formeln:

$$\mathrm{tanj}\,\varphi=\frac{\mathrm{sinj}\,\varphi}{\mathrm{cosj}\,\varphi}=\frac{1}{\mathrm{cotj}\,\varphi}\,. \tag{9}$$

Für das Dreieck $OPP'$ gilt:

$$(a-a')^2+\nu(a-a')(b-b')-\mu(b-b')^2=r^2+r'^2-2rr'\,\mathrm{cosj}\,(\overline{OP}, \overline{OP'})\,, \tag{10}$$

wobei $P(a, b)$, $P'(a', b')$, $OP=r$, $OP'=r'$ ist.

**6.** *Geometrische Deutung der binären komplexen Zahlen.* Es sei $P=(x, y)$. Dann sind die Gleichungen der Geraden $\overline{PA_1}$ und $\overline{PA_2}$:

$$(-X+jY)+\bar{z}t=0\,, \qquad (-X+\bar{j}Y)+zt=0\,. \tag{11}$$

Also *kann man $\bar{z}$ und $z$ bzw. als die Doppelverhältniskoordinaten in den Geradenbüscheln $A_1$ und $A_2$ ansehen.*

**7.** *Das projektive Erzeugnis.* Sind insbesondere die beiden Geradenbüschel [11] projektive aufeinander bezogen:

$$\bar{z}=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad |\alpha\delta-\beta\gamma|\neq 0, \tag{12}$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Bezug auf $i$ und $j$ bikomplexe Zahlen sind, so ist ihr projektive Erzeugnis im Falle

| | | |
|---|---|---|
| $\nu^2+4\mu<0$ die Ellipse: | $\nu^2+4\mu>0$ die Hyperbel: | $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = In-finitesimale die Parabel: |

$$x^2+\nu xy-\mu y^2+\frac{\delta-\alpha}{\gamma}x+\frac{\nu\delta-(\delta+\alpha)j}{\gamma}y-\frac{\beta}{\gamma}=0. \tag{13}$$

Also ist [12] die Gleichung des Kegelschnittes [13], welche durch die absoluten

| | | |
|---|---|---|
| Ellipsenpunkte | Hyperbelpunkte | Parabelpunkte |

$A_1$ und $A_2$ hindurchgeht. Alle diejenigen Kegelschnitte, deren Gleichung vor der Gestalt [13] ist, sind *ähnlich* und *ähnlich gelegen.* Umgekehrt, es lässt sich zeigen, dass jede durch $A_1$ und $A_2$ hindurchgehenden ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte durch Gleichungen von der Gestalt [12] darstellen lassen. Dabei ist der Grenzfall $\alpha\delta-\beta\gamma=0$ des Geradenpaares ausgeschlossen.

**8.** *j-Möbiussche Geometrie in der Ebene. Die allgemeinsten, eigentlichen, ein-eindeutigen Punkttransformationen, durch welche die durch die beiden absoluten Punkte $A_1$ und $A_2$ hindurchgehenden Kegelschnitte in eben solche transformiert werden, lassen sich in der Gestalt*

$$z^*=\frac{\alpha z+\beta}{\alpha z+\delta}, \qquad |\alpha\delta-\beta\gamma|\neq 0, \tag{14}$$

*und die uneigentlichen eben solchen in der Gestalt*

$$\bar{z}^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad |\alpha\delta-\beta\gamma|\neq 0 \tag{15}$$

*darstellen, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Bezug auf $i$ und $j$ bikomplexe Zahlen sind.* Dabei nennen wir die Transformationen eine eigentliche oder uneigentliche, jenachdem der Sinn des Winkels beibehalten wird oder nicht. Die Gesamtheit der Transformationen [14] und [15] bildet offenbar eine Gruppe, die wir *j-Möbiussche* [oder *j-konforme*] *Transformationsgruppe* nennen wollen. Die zugehörige Geometrie möchte ich *j-Möbiussche* [*oder j-konforme*] *Geometrie* in der Ebene nennen.

**9.** *Tetraelliptische, tetrahyperbolische und tetraparabolische Koordinaten.* Setzt man

$$\begin{cases} 2\rho\cdot\mathfrak{x}_1=(z+\bar{z}), & 2\rho\cdot\mathfrak{x}_2=i(z-\bar{z}), \\ 2\rho\cdot\mathfrak{x}_3=i(1+z\bar{z}), & 2\rho\cdot\mathfrak{x}_4=-(1-z\bar{z}), \end{cases} \qquad (\rho\neq 0) \tag{16}$$

so gilt die Identität:

[17] $$(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4=0\,.$$

Die Gleichungen [16] lassen sich folgendermassen umschreiben:

[18]
$$\begin{cases} \rho\cdot\mathfrak{x}_1=x+\dfrac{\nu}{2}y\,, \qquad \rho\cdot\mathfrak{x}_2=-\dfrac{i}{2}\sqrt{\nu^2+4\mu}\,y\,, \\ \rho\cdot\mathfrak{x}_3=\dfrac{i}{2}(1+x^2+\nu xy-\mu y^2)\,, \\ \rho\mathfrak{x}_4=-\dfrac{1}{2}(1-x^2-\nu xy+\mu y^2)\,. \end{cases}$$

Das Fundamentalsystem der Koordinaten besteht aus den vier Figuren: $x+\frac{\nu}{2}y=0$, $y=0$, $x^2+\nu xy-\mu y^2+1=0$ und $x^2+\nu xy-\mu y^2-1=0$.

Setzt man für die

Ellipse: | Hyperbel: | Parabel:

[19]
$$(x-a)^2+\nu(x-a)(y-b)-\mu(y-b)^2$$
$$=\left\{(x-a)+\frac{\nu}{2}(y-b)\right\}^2-\frac{\nu^2+4\mu}{4}(y-b)^2=\varepsilon r^2\,, \qquad (\varepsilon=\pm1)$$

folgendermassen:

[20][5)]
$$\begin{cases} \xi_1=\dfrac{2a+\nu b}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}\,, \qquad \xi_2=-\dfrac{i\sqrt{\nu^2+4\mu}}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}b\,, \\ \xi_3=\dfrac{i}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2+1)\,, \\ \xi_4=\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(a^2+\nu ab-\mu b^2-\varepsilon r^2-1)\,, \end{cases}$$

---

5) Im Falle $\sqrt{\nu^2+4\mu}=p=$Infinitesimale wird [19] zu:
$$\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b'+b'-b)\right\}^2-\frac{p^2}{4}(y-b)^2-\varepsilon r^2=0$$
d. h. $\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-\nu(b'-b)\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(b'-b)\right\}^2+\frac{\nu^2}{4}(b'-b)^2+\frac{p^2}{2}b(y-b')+\frac{p^2}{2}bb'-\frac{p^2}{4}b^2-\varepsilon r^2=0$, welche etwa in $\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-4d\left\{m(x-a)+(y-b')\right\}=0$ übergehen muss. Durch Vergleichung der Koeffizienten von $(x-a)$, $(y-b')$ usw. von den beiden letzten Gleichungen, erhalten wir: $-8d=p^2b$, $\nu(b'-b)=4dm$ und $\frac{3}{4}\nu^2(b'-b)^2+\frac{p^2}{2}bb'-\frac{p^2}{4}b^2-\varepsilon r^2=0$. Aus den beiden ersten folgt: $m=\frac{2\nu(b-b')}{p^2b}=\frac{\nu(b'p^2+8d)}{4dp^2}$. Also erhalten wir: $\left\{(x-a)-\frac{\nu}{2}(y-b')\right\}^2-4d\left\{\frac{\nu(b'p^2+8d)}{4dp^2}(x-a)+(y-b')\right\}=0$, wobei $p^2b=-8d$, $2\sqrt{\varepsilon}\,r=\frac{1}{p^2}[3\nu^2(b'p^2+8d)-16b'dp^4-64d^2p^2]^{\frac{1}{2}}$ ist. [20] wird jetzt zu: $\xi_1=(2ap^2-8\nu d):[3\nu^2b'^2p^4+16d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)]^{\frac{1}{2}}$, $\xi_2=8ipd:[3\nu^2b'^2p^4+16d(3\nu^2-p^2)(b'b^2+4d)]^{\frac{1}{2}}$, $\xi_3=i\left[(a^2+1)p^4-8\nu adp^2-64\mu d^2-\frac{3}{4}\nu^2b'^2p^4-4d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)\right]:p^2[3\nu^2b'^2p^2+16d(3\nu^2-p^2)\times(b'p^2+4d)]^{\frac{1}{2}}$, $\xi_4=\left[(a^2-1)p^4-8\nu adp^2-64\mu d^2-\frac{3}{4}\nu^2b'^2p^4-4d(3\nu^2-p^2)(b'^2+4d)\right]:p^2[3\nu^2b'^2p^2+16d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)]^{\frac{1}{2}}$. Im Falle $\nu=0$ wird dies wieder zu: $\xi_1=\frac{pai}{4d}$, $\xi_2=1$, $\xi_3=\frac{p}{8d}(a^2+4b'd+1)$, $\xi_4=\frac{pi}{8d}(a^2+4b'd-1)$.

so besteht die Identität:

$$[21] \qquad (\xi\xi)_4 = 1\,,$$

und [19] wird zu:

$$[22] \qquad (\xi\mathfrak{x})_4 = 0\,.$$

Die *Fundamentalinvariante* in der entsprechenden Geometrie ist:

$$[23]^{6)} \quad \operatorname{cosj} \varphi = (\xi\xi')_4 = \frac{-(a-a')^2 - \nu(a-a')(b-b') + \mu(b-b')^2 + \varepsilon(r^2+r'^2)}{2\varepsilon r r'}\,.$$

In diesem Sinne ist unsre Geometrie *winkeltreu* (*konform*); *nur dass die Winkel-Massbestimmung im Falle*

| | | |
|---|---|---|
| $\nu^2+4\mu<0$, *elliptisch* | $\nu^2+4\mu>0$, *hyperbolisch* | $\sqrt{\nu^2+4\mu}$ = Infinitesimale, *parabolisch* |

ist.

Die zugehörige Gruppe ist von den *quaternären, orthogonalen Transformationen.*

**10.** *Pentaellipsoidische, pentahyperboloidische und pentaparaboloidische Koordinaten. j-Möbiussche Geometrie im Raume.*

Den unendlichfernen Kegelschnitte, in welchem der Kegel

$$[24] \qquad \mu x^2 - \nu xy - y^2 - \lambda z^2 + \varkappa yz + \tau zx = 0$$

die unendlichferne Ebene trifft, wollen wir den *absoluten Kegelschnitt* nennen.

Setzten wir

$$[25] \quad \left\{\begin{aligned}
\rho\cdot\mathfrak{x}_1 &= \frac{\sqrt{\nu^2+4\mu}}{2}x + \frac{\tau-\frac{\nu\varkappa}{2}}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}z\,,\\
\rho\cdot\mathfrak{x}_2 &= i\left(\frac{\nu}{2}x + y - \frac{\varkappa}{2}z\right),\\
\rho\cdot\mathfrak{x}_3 &= \frac{\sqrt{-\lambda(\nu^2+4\mu)-\tau^2+\nu\varkappa\tau+\varkappa^2\mu}}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}z\,,\\
\rho\cdot\mathfrak{x}_4 &= \frac{i}{2}(\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\varkappa yz+\tau zx+1)\,,\\
\rho\cdot\mathfrak{x}_4 &= \frac{1}{2}(\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\varkappa yz+\tau zx-1)\,,
\end{aligned}\right.$$

und

6) Dies wird im Falle $\sqrt{r^2+4\mu}=p=$ Infinitesimale zu: $(\xi\bar{\xi})_4=2\Big[a\bar{a}p^4-8p^2\nu(a\bar{d}+\bar{a}d)+32(\nu^2-p^2)d\bar{d}-p^4(a^2+\bar{a}^2)+8\nu p^2(ad+\bar{a}\bar{d})+64\mu(d^2+\bar{d}^2)+\frac{3}{4}\nu^2p^4(b'^2+\bar{b}'^2)+16(3\nu^2-p^2)(d^2+\bar{d}^2)\Big]:$ $[3\nu^2b'^2p^4+16d(3\nu^2-p^2)(b'p^2+4d)]^{\frac{1}{2}}[3\nu^2\bar{b}'^2p^4+16\bar{d}(3\nu^2-p^2)(\bar{b}'p^2+4\bar{d})]^{\frac{1}{2}}$ und im Falle $\nu=0$ zu: $(\xi\bar{\xi})_4=\dfrac{32d\bar{d}+p^2(a-\bar{a})^2+4p^2(\bar{b}'d+b'\bar{d})}{32d\bar{d}}\,.$

$$
[26]^{7)}\quad
\begin{cases}
\xi_1=\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}\left[\sqrt{\nu^2+4\mu}\,a+\dfrac{2\tau-\nu\varkappa}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}c\right], \\[2ex]
\xi_2=i\,\dfrac{\nu a+2b-\varkappa c}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}, \\[2ex]
\xi_3=\dfrac{2\sqrt{-\lambda(\nu^2+4\mu)-\tau^2+\varkappa\nu\tau+\varkappa^2\mu}}{2\sqrt{\varepsilon}\,r\sqrt{\nu^2+4\mu}}\,c, \\[2ex]
\xi_4=\dfrac{i}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(\mu a^2-\nu ab-b^2-\lambda c^2+\varkappa bc+\tau ca-\varepsilon r^2+1), \\[2ex]
\xi_5=\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(\mu a^2-\nu ab-b^2-\lambda c^2+\varkappa bc+\tau ca-\varepsilon r^2-1),
\end{cases}
$$

so gelten die folgenden Identitäten:

$$[27] \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5=0, \qquad (\xi\xi)_5=1.$$

*Das ähnliche und ähnlich gelegene Konikoid*

$$[28] \qquad \mu(x-a)^2-\nu(x-a)(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2 \\ +\varkappa(y-b)(z-c)+\tau(z-c)(x-a)=\varepsilon r^2$$

*wird durch die lineare Gleichung*

$$[29] \qquad (\xi\mathfrak{x})_5=0$$

*dargestellt.*

Die Koordinaten $(\mathfrak{x})_5$ und $(\xi)_5$ möchte ich bzw.

*pentaellipsoidische* | *pentahyperboloidische* | *pentaparaboloidische*

7) Im Falle, dass [28] ein Paraboloid $\mu(x-a')^2-\nu(x-a')(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2+\varkappa(y-b)(z-c)+\tau(z-c)(x-a')+(a'-a)\{2\mu(x-a')-\nu(y-b)+\tau(z-c)\}+\mu(a-a')^2-\varepsilon r^2\equiv \mu(x-a')^2-\nu(x-a')(y-b)-(y-b)^2-\lambda(z-c)^2+\mu(y-b)(z-c)+\tau(z-c)(x-a')-4d\left\{(x-a')-\frac{\nu}{2\mu}(y-b)+\frac{\tau}{2\mu}(z-c)\right\}=0$ wird, ist $2d=\mu(a-a')$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=\sqrt{\mu}\,(a-a')$ und

$$\begin{vmatrix} \mu & -\frac{\nu}{2} & \frac{\tau}{2} \\ -\frac{\nu}{2} & -1 & \frac{\varkappa}{2} \\ \frac{\tau}{2} & \frac{\varkappa}{2} & -\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left[\left(\lambda-\frac{\varkappa^2}{4}\right)(\nu^2+4\mu)+\left(\tau+\frac{\nu\varkappa}{2}\right)^2\right]=0.$$

Dabei wird [26] zu:

$$\xi_1=\frac{\sqrt{\mu}}{4d}\left[\sqrt{\nu^2+4\mu}\left(\frac{2d}{\mu}+a'\right)+\frac{2\tau-\nu\varkappa}{\sqrt{\nu^2+4\mu}}c\right],$$

$$\xi_2=\frac{i\sqrt{\mu}}{4d}\left[\frac{2d\nu}{\mu}+a'+2b-\varkappa c\right],$$

$$\xi_3=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{-\lambda(\nu^2+4\mu)-\tau^2+\nu\varkappa\tau+\varkappa^2\mu}}{2d\sqrt{\nu^2+4\mu}}c,$$

$$\xi_4+\frac{\sqrt{\mu}}{4d}\left(\mu a'^2-\nu a'b-b^2-\lambda c^2+4a'd-2d\frac{\nu}{\mu}b+2d\frac{\tau}{\mu}c-1\right),$$

$$\xi_5=-\frac{i\sqrt{\mu}}{4d}\left(\mu a'^2-\nu a'b-b^2-\lambda c^2+4a'd-2d\frac{\nu}{\mu}b+2d\frac{\tau}{\mu}c+1\right).$$

*Punktkoordinaten* und

| | | |
|---|---|---|
| *pentaellipsoidische Ellipsoidenkoordinaten* | *pentahyperboloidische Hyperboloidenkoordinaten* | *pentaparaboloidische Paraboloidenkoordinaten* |

nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in der entsprechenden Geometrie ist:

$$[30]^{8)} \quad \operatorname{cosj}\varphi=(\xi\xi')_5=\frac{1}{2\varepsilon rr'}[-\mu(a-a')^2+\nu(a-a')(b-b')+(b-b')^2 \\ +\lambda(c-c)^2-\varkappa(b-b')(c-c')-\tau(c-c')(a-a')+\varepsilon(r^2+r'^2)].$$

Die zugehörige Gruppe ist von den *quinären, orthogonalen Transformationen.*

*N. B.* Auf der Konikoidenfläche $\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\varkappa yz+\tau zx=1$ entsteht eine zwei-dimensionale $j$-konforme Geometrie.

**11.** *Algebraische j-konforme Geometrie und j-konforme Differentialgeometrie. Die algebraische j-konforme Geometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen algebraischen konforme Geometrie im Buch:*

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) *entwickeln.*

*Die j-konforme Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen konformen Differentialgeometrie im Buch:*

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band I, (1938)

*entwickeln.* Die Ergebnisse (z. B. $j$-konforme Minimalflächen, $j$-Hauptellipsen, $j$-Haupthyperbeln, $j$-Hauptparabeln, Zentralellipsoide, Zentralhyperboloide, Zentralparaboloide usw.) müssen wirklich schön sein.

**12.** *Herleitung der drei parabolischen Geometrien.* Adjungiert man zum $j$-konformen Raume den unendlichfernen Punkt

$$(31) \quad \mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3:\mathfrak{x}_4:\mathfrak{x}_5=0:0:0:\frac{i}{2}(\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\varkappa yz \\ +\tau zx):\frac{1}{2}(\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\varkappa yz+\tau zx)=0:0:0:i:1,$$

so dass die Beziehung

$$i\xi_4+\xi_5=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,r}=0$$

gilt und also die sämtlichen Konikoide [28] Ebenen werden, dann wird [29] zu:

$$(32) \qquad (\xi\mathfrak{x})_3-i\xi_4(i\mathfrak{x}_4+\mathfrak{x}_5)=0\,.$$

Normieren wir $(\mathfrak{x})_5$ durch die Forderung:

$$(33) \qquad i\mathfrak{x}_4+\mathfrak{x}_5=-1\,,$$

8) Im Falle, dass [28] ein Paraboloid ist, wird [30] zu:

$$(\xi\xi')_5=\frac{\mu}{8dd'}\Big[-\frac{4}{\mu}(d-d')^2+\frac{2\nu'}{\mu}(d-d')(b-b')+(b-b')^2+\lambda(c-c')^2 \\ -\varkappa(b-b')(c-c')-\frac{2\tau}{\mu}(c-c')(d-d')+\frac{4}{\mu}(d^2+d'^2)\Big]$$

so wird $\rho=+1$ in [25] und (32) wird zur Normalform:

$$lx+my+nz-p=0. \tag{34}$$

Also geht der $j$-konforme Raum in den parabolischen Raum über, in welchem das Winkelmass im Falle, dass [24]

imaginär ist, elliptisch | reell ist, hyperbolisch | Punkt ist, parabolisch

ist. *Die zugehörige Gruppen sind Untergruppen der affinen Gruppe.*

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.

**13.** *Herleitung der drei N. E. Geometrien.* Adjungirt man zum $j$-konformen Raume das Konikoid

$$0:0:0:0:1, \quad\Big|\quad 0:0:0:1:0,$$

so entsteht eine Art (im ganzen sechs!) von N. E. Geometrie, bei welcher das Konikoid

$$0\cdot\mathfrak{x}_1+0\cdot\mathfrak{x}_2+0\cdot\mathfrak{x}_3+0\cdot\mathfrak{x}_4+1\cdot\mathfrak{x}_5=0 \quad\Big|\quad 0\cdot\mathfrak{x}_1+0\cdot\mathfrak{x}_2+0\cdot\mathfrak{x}_3+1\cdot\mathfrak{x}_4+0\cdot\mathfrak{x}_5=0$$

d. h.

$$\mu x^2-\nu xy-y^2-\lambda z^2+\kappa yz+\tau zx$$

$$-1=0 \quad\Big|\quad +1=0$$

die Rolle der absoluten Fläche spielt und das Winkelmass im Falle dass [24]

imaginär ist, elliptisch | reell ist, hyperbolisch | Punkt ist, parabolisch

ist.

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.

*Die $j$-konforme Geometrie umfasst also die neun Arten von Euklidischen und N. E. Geometrien, welche alle den Untergruppen der projektiven Gruppe zugehören.*

---

Berichtigung zum I. Abschnitt:

| Seite | Linie | für | lies |
|---|---|---|---|
| 335 | 8 | $1:i:0$ | $i:1:0$ |
| „ | „ | $H_2(1:h:0)$, $H_2(1:-h:0)$ | $H_1(h:1:0)$, $H_2(-h:1:0)$ |
| „ | 25 | $\overline{PI_2}$ und $\overline{PI_1}$ | $\overline{PI_1}$ und $\overline{PI_2}$ |
| „ | 35 | $(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0$ | $\lvert\alpha\delta-\beta\gamma\rvert\neq 0$ |
| 336 | 26 | $(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0$ | $\lvert\alpha\delta-\beta\gamma\rvert\neq 0$ |
| „ | 28 | $(\alpha\delta-\beta\gamma)\neq 0$ | $\lvert\alpha\delta-\beta\gamma\rvert\neq 0$ |
| 337 | 3 | $=i(z-\bar{z})$ | $=-i(z-\bar{z})$ |
| „ | 8 | $=imy,$ | $=-imy,$ |
| „ | 18 | $=\frac{imb}{\sqrt{\varepsilon}\,r}$ | $=-\frac{imb}{\sqrt{\varepsilon}\,r}$ |
| „ | 27 | $m=h^2$ | $m=h$ |
| „ | „ | $\varphi^2=\frac{(a-a')^2+}{8dd'}$ | $\varphi^2=-\frac{(a-a')^2+}{4dd'}$ |
| „ | Fussnote | $\xi_2=1$ | $\xi_2=-1$ |
| 338 | „ | $(y-c)$ | $(y-b)$ |
| 339 | 3 | $8dd'$ | $4dd'$ |
| „ | 7 | $m=i$ | $m=e$ |
| „ | 22 | —Parabeln | —Hauptparabeln |
| 340 | 4 | welchen | welchem |