67. Über die Charakterisierung des allgemeinen C-Raumes.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Ich habe in einer anderen Abhandlung[1] beschrieben: *wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul*[2] $\mathfrak{M}$ *den Bedingungen genügt:*

M) $\|(|a|\smile|b|)\| = \mathrm{Max}(\|a\|, \|b\|)$

S) $\underset{\alpha}{\text{Obere Grenze}}\ \|a_\alpha\| = \underset{a_\alpha \leqq b}{\text{Untere Grenze}}\ \|b\|$

für jede beschränkte Menge positiver Elemente $\{a_\alpha\}$, *und* $\mathfrak{M}$ *über die Norm vollständig ist, so kann man* $\mathfrak{M}$ *durch alle stetigen Funktionen* $f_a(x)$ (*entsprechend* $a \in \mathfrak{M}$), *oder durch alle, in einem bestimmten Punkt verschwindenden, stetigen Funktionen auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum R vollständig darstellen, und sogar* $\|a\| = \underset{x \in R}{\mathrm{Max}} |f_a(x)|$. Diesen Satz haben wir unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element besitzt, und bemerkt, dass man diesen Satz im allgemeinen Falle auch beweisen kann. In dieser Abhandlung wollen wir den Beweis dieses Satzes ergänzen, indem wir diesen Satz unter der Voraussetzung beweisen, dass dieser Satz schon besteht, falls $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element umfasst.

§ 1. Zuerst betrachten wir einen teilweise geordneten Modul $\mathfrak{M}$, der nur den algebraischen Bedingungen 1)–5), nicht notwendig der Limesbedingung 6)[3], genügt. Für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ bezeichnet man mit $\mathfrak{P}'$ die Menge aller Elemente b von $\mathfrak{M}$, die zu jedem Element von $\mathfrak{P}$ orthogonal sind, d. h. $|b|\frown|a| = 0$ für alle $a \in \mathfrak{P}$.

Definition 1. Eine Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ heisst eine *normale Mannigfaltigkeit in* $\mathfrak{M}$, wenn $(\mathfrak{P}')' = \mathfrak{P}$ ist.

Man kann dann leicht einsehen, dass jede normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ mit a, b auch $\alpha a + \beta b$ für reelle Zahlen α, β, $a \smile b$, $a \frown b$, und x für $|x| \leqq |a|$ enthält, und folglich ist $\mathfrak{P}$ auch ein teilweisegeordneter Modul. Es ist auch deutlich, dass für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{P}'$ eine normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$ ist.

Definition 2. Für jede Teilmenge $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ bezeichnet man mit $[\mathfrak{P}]$ die, $\mathfrak{P}$ umfassende, kleinste, normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$, d. h. $[\mathfrak{P}] = (\mathfrak{P}')'$.

---

1) H. Nakano: Über normierte teilweisegeordnete Moduln, Proc. **17** (1941), 311.

2) In dieser Abhandlung verstehen wir unter einem *normierten teilweisegeordneten Modul* $\mathfrak{M}$ einen derartigen normierten Modul in bezug auf den Körper der reellen Zahlen, dass 1) aus $a > b$ und $b > c$ ja $a > c$ folgt; 2) $a \not> a$; 3) für je zwei a, b das Element $a \smile b$ und $a \frown b$ in $\mathfrak{M}$ existiert; 4) aus $a > b$ ja $a + c > b + c$ folgt; 5) aus $a > 0$ für jede positive Zahl α ja $\alpha a > 0$ folgt; I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\| = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$ ist; II) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$ für jede reelle Zahl α; und III) aus $|a| \leqq |b|$ ja $\|a\| \leqq \|b\|$ folgt.

3) Vgl. 1).

Für zwei normale Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ist der Durchschnitt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ auch eine normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$, denn es gilt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}=[\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}']'$. Man kann auch leicht einsehen: dafür, dass für zwei normale Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}=0$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zueinander orthogonal sind, d. h. jedes Element von $\mathfrak{P}$ ist zu allen Elementen von $\mathfrak{Q}$ orthogonal.

Definition 3. Für zwei normale Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ schreibt man $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{Q}$, wenn $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$, und $\mathfrak{P} \succ \mathfrak{Q}$, wenn $\mathfrak{P}$ ein derartiges Element a enthält, dass zu jedem $b \in \mathfrak{Q}$ für eine passende positive Zahl α ja $\alpha a \geqq |b|$ gilt.

§ 2. Hier betrachten wir einen teilweisegeordneten Modul von stetigen Funktionen.

Definition 4. Eine stetige Funktion $f(x)$ auf einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R heisst eine *C-Funktion* auf R, wenn für jede positive Zahl ε die Punktmenge

$$E[x;\ |f(x)| \geqq \varepsilon]$$

stets bikompakt ist.

Die Menge $\mathfrak{C}$ *aller* C-Funktionen auf R genügt deutlich den Bedingungen 1)–5), und ist vollständig über die Norm $\operatorname*{Max}_{x \in R} |f(x)|$, d. h. ein Banachscher Raum mit dieser Norm.

Satz 1. Für eine bikompakte Punktmenge P und eine, von P fremde, abgeschlossene Punktmenge Q in einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R gibt es eine derartige C-Funktion $f(x)$, dass $f(x)=1$ in P, $f(x)=0$ in Q, und $0 \leqq f(x) \leqq 1$ in R ist.

Beweis. Da R bikompakt im kleinen ist, kann man durch Hinzufügung eines einzigen Punktes ξ eindeutigerweise den bikompakten Hausdorffschen Raum $R+\xi$[4] erhalten. Dann sind P und $Q+\xi$ beide abgeschlossen in $R+\xi$, und fremd voneinander. Daher gibt es eine stetige Funktion $f(x)$ auf $R+\xi$ derart, dass $f(x)=1$ in P, $f(x)=0$ in Q, und $0 \leqq f(x) \leqq 1$ in $R+\xi$. Diese Funktion $f(x)$ ist eine C-Funktion in R, und genügt der betreffenden Bedingung.

Satz 2. Jeder normalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{C}$ entspricht die einzige, regulär offene[5] *Punktmenge P in R derart, dass $\mathfrak{P}$ nur aus allen C-Funktionen auf P besteht, d. h. nur aus allen, in der regulär abgeschlossenen*[6] *Punktmenge $R-P$ verschwindenden, C-Funktionen auf R. Solche regulär offene Punktmenge nennen wir die charakteristische Punktmenge der normalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$.*

Beweis. Wir lassen jeder C-Funktion $g(x) \in \mathfrak{P}'$ die offene Punktmenge $N_g=E[x;\ |g(x)|>0]$ entsprechen. Dann müssen jede C-Funktion $f(x) \in \mathfrak{P}$ in N_g verschwinden, da $\operatorname{Min}\{|f(x)|, |g(x)|\}=0$ sein soll. Daher verschwinden alle C-Funktionen von $\mathfrak{P}$ in der offenen Punktmenge

---

4) Vgl. P. Alexandroff und H. Hoph: Topologie, Berlin, 1935.

5) Eine offene Punktmenge heisst *regulär offen*, wenn sie aus allen inneren Punkten einer abgeschlossenen Punktmenge besteht.

6) Eine abgeschlossene Punktmenge heisst *regulär abgeschlossen*, wenn sie die abgeschlossene Hülle einer offenen Punktmenge ist. Daher ist das Komplement einer regulär offenen Punktmenge stets regulär abgeschlossen, und das Komplement einer regulär abgeschlossenen Punktmenge ist regulär offen.

$\sum\limits_g N_g$. Umgekehrt, wenn eine C-Funktion $f(x)$ in $\sum\limits_g N_g$ verschwindet, so ist $f(x)$ offenbar zu $\mathfrak{P}'$ orthogonal, und folglich $f(x) \in \mathfrak{P} = (\mathfrak{P}')'$. Setzt man $P = R - \overline{\sum\limits_g N_g}$, so ist P regulär offen, und nach Obigem besteht $\mathfrak{P}$ nur aus allen, in $R-P$ verschwindenden, C-Funktionen.

Zu jedem Punkt $y \in P$ gibt es nach Satz 1 eine C-Funktion $f(x)$ derart, dass $f(y)=1$, und $f(x)=0$ in $R-P$ ist. Diese C-Funktion $f(x)$ ist offenbar orthogonal zu $\mathfrak{P}'$. Daher gibt es für $y \in P$ eine C-Funktion $f(x)$ in $\mathfrak{P}$, die am Punkt y nicht verschwindet. Folglich ist solche P eindeutig bestimmt.

Satz 3. Für jede regulär offene Punktmenge P in R gibt es die einzige, normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$, die P als die charakteristische Punktmenge besitzt.

Beweis. Da P regulär offen ist, kann man für eine passende offene Punktmenge Q schreiben: $R-P=\overline{Q}$. Zu jedem Punkt $y \in Q$ gibt es nach Satz 1 eine derartige C-Funktion $f_y(x)$, dass $f_y(y)=1$, $f_y(x)=0$ in $R-Q$, und $0 \leqq f_y(x) \leqq 1$ in R ist. Bezeichnet man mit $\mathfrak{Q}$ die Menge solcher C-Funktionen für alle $y \in Q$, so besitzt die normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q}'$ die regulär offene Punktmenge P als die charakteristische Punktmenge. Denn jede C-Funktion von $\mathfrak{Q}'$ verschwindet in Q und folglich in $\overline{Q}=R-P$, und alle, in $\overline{Q}$ verschwindenden, C-Funktionen gehören offenbar zu $\mathfrak{Q}'$.

Aus der Definition der charakteristischen Punktmenge folgt sofort der

Satz 4. Wenn man die charakteristischen Punktmengen von zwei normalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bzw. mit P, Q bezeichnet, so ist $\mathfrak{P} \geqq \mathfrak{Q}$ mit $P \supset Q$ gleichbedeutend.

Satz 5. Dafür, dass zwei normale Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zueinander orthogonal seien, d. h. $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}=0$, ist notwendig und hinreichend, dass ihre charakteristischen Punktmengen P, Q voneinander fremd sind, d. h. $PQ=0$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \neq 0$ ist, so gibt es eine C-Funktion $f(x)$ $(\neq 0) \in \mathfrak{P}$ und $\in \mathfrak{Q}$. Sei $f(y) \neq 0$ für einen Punkt $y \in R$, so muss $y \in P$ und $\in Q$ sein, und folglich $PQ \neq 0$. Umgekehrt, wenn $PQ \neq 0$ ist, so gibt es für einen Punkt $y \in PQ$ nach Satz 1 eine deraritige C-Funktion $f(x)$, dass $f(y) \neq 0$, $f(x)=0$ in $R-PQ$ ist. Daher gehört $f(x)$ zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, und folglich $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \neq 0$.

Satz 6. Damit $\mathfrak{C} > \mathfrak{P}$ für eine normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ besteht, ist notwendig und hinreichend, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{P}$ der charakteristischen Punktmenge P von $\mathfrak{P}$ bikompakt ist.

Beweis. Es sei eine C-Funktion $f(x)$ auf R. Wenn zu jeder $g(x) \in \mathfrak{P}$ für eine passende positive Zahl α stets $\alpha f(x) \geqq |g(x)|$ gilt, so muss $f(x) \geqq \varepsilon$ in P für eine positive Zahl ε sein. Denn, wenn für eine Punktfolge $x_1, x_2, \dots$ in P $0 < f(x_n) \leqq \frac{1}{n^4}$ ist, so gibt es nach Satz 1 eine derartige C-Funktion $g_n(x) \in \mathfrak{P}$, dass $g_n(x_n) = \sqrt{f(x_n)}$, und $0 \leqq g_n(x) \leqq \sqrt{f(x_n)}$ in R ist. Da $\mathfrak{P}$ über die Norm $\operatorname*{Max}\limits_{x \in R} |f(x)|$ vollständig ist, konvergiert die Reihe $g_1(x) + g_2(x) + \cdots$ nach einer C-Funktion

$g_0(x) \in \mathfrak{P}$, und $g_0(x_n) \geqq g_n(x_n) = \sqrt{f(x_n)} \geqq n^2 f(x_n)$, was aber nach Voraussetzung unmöglich ist. Da die Punktmenge $E[x; f(x) \geqq \varepsilon] \supset \bar{P}$ bikompakt ist, muss die abgeschlossene Hülle $\bar{P}$ bikompakt sein.

Umgekehrt, wenn $\bar{P}$ bikompakt ist, so gibt es nach Satz 1 eine derartige C-Funktion $f(x) (\geqq 0) \in \mathfrak{C}$, dass $f(x) = 1$ in $\bar{P}$ ist. Dann gibt es zu jeder C-Funktion $g(x) \in \mathfrak{P}$ eine positive Zahl α, nämlich $\alpha = \operatorname{Max}_{x \in R} |g(x)|$, damit $\alpha f(x) \geqq |g(x)|$ in R besteht.

§ 3. Nun betrachten wir einen normierten teilweisegeordneten Modul $\mathfrak{M}$, der den Bedingungen M), S) genügt, und über die Norm vollständig ist. Wenn $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element v besitzt, so haben wir schon bewiesen[7], dass man $\mathfrak{M}$ durch alle stetigen Funktionen $f_a(x)$, oder durch alle, in einem bestimmten Punkt verschwindenden, stetigen Funktionen auf einem bikompakten Hausdorffschen Raum R vollständig darstellen kann, und $\|a\| = \operatorname{Max}_{x \in R} |f_a(x)|$. Hierbei kann man auch so sagen, dass man $\mathfrak{M}$ durch alle C-Funktionen auf einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum vollständig darstellen kann, indem man im zweiten Falle den bestimmten Punkt aus R weglässt. Solchen, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R nennen wir einen *darstellenden Raum von* $\mathfrak{M}$, und die C-Funktion $f_a(x)$ auf R die *darstellende C-Funktion* des Elementes a.

Satz 7. Für zwei darstellende Räume R_1, R_2 von $\mathfrak{M}$ gibt es eine einzige eineindeutige Zuordnung zwischen R_1 und R_2, damit $f_a(x) = g_a(y)$ besteht für die, demselben Element a entsprechenden, darstellenden C-Funktion $f_a(x)$ und $g_a(y)$ bzw. auf R_1 und R_2, und je zugeordnete Punkte x und y bzw. in R_1 und R_2.

Beweis. Nach Satz 3 entspricht jeder regulär offenen Punktmenge P_1 in R_1 eine einzige normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$, und derselben entspricht nach Satz 2 eine einzige regulär offene Punktmenge P_2 in R_2, und umgekehrt. Die abgeschlossene Hülle $\bar{P}_1$ ist nach Satz 6 bikompakt dann und nur dann, wenn $\bar{P}_2$ bikompakt ist. Für jeden Punkt $x_0 \in R_1$ gibt es ein System von Umgebungen $\{U_\alpha\}$ von x_0, sodass alle U_α regulär offen, mindestens eins von $\bar{U}_\alpha$ bikompakt, und $x_0 = \prod_\alpha \bar{U}_\alpha$ ist. Jeder Umgebung U_α entspicht eine regulär offene Punktmenge $V_\alpha \in R_2$, und mindestens eins von V_α ist bikompakt. Nach Satz 4 ist $\prod_\alpha V_\alpha \neq 0$ für endlich viele α. Da mindestens eins von $\bar{V}_\alpha$ bikompakt ist, gilt auch $\prod_\alpha \bar{V}_\alpha \neq 0$ für alle α. Nach Satz 5 muss $\prod_\alpha \bar{V}_\alpha$ nur aus einem einzigen Punkt y_0 bestehen. Indem man dem Punkt x_0 den y_0 entsprechen lässt, erhält man eine eineindeutige Zuordnung zwischen R_1 und R_2, und eine regulär offene Punktmenge in R_1 entspricht sogar einer regulär offenen Punktmenge in R_2. Daher ist diese Zuordnung zweiseitig stetig.

Jedem Element $a \in \mathfrak{M}$ entspricht die darstellende C-Funktion $f_a(x)$ auf R_1 und $g_a(y)$ auf R_2. Wenn $f_a(x_0) > 0$ an einem Punkt $x_0 \in R_1$ ist, so gibt es eine regulär offene Umgebung U von x_0, worin stets $f_a(x) \geqq \varepsilon$

7) Vgl. 1).

für eine positive Zahl ε ist. Wenn man mit $\mathfrak{P}$ die normale Mannigfaltigkeit in $\mathfrak{M}$ bezeichnet, deren charakteristische Punktmenge U ist, so gilt zu jedem $b \in \mathfrak{P}$ $\alpha f_a(x) \geqq |f_b(x)|$ in U für eine passende positive Zahl α, und folglich $\alpha a_+ \geqq |b|$. Dergleichen gilt mithin auch für $g_a(y)$. Daher muss $g_a(y_0) > 0$ für den, dem x_0 entsprechenden, Punkt $y_0 \in R_2$ sein. Da dieses Verhältnis umkehrbar ist, entsprechen die Nullpunkte von $f_a(x)$ auch den Nullpunkten von $g_a(y)$, und umgekehrt. Demzufolge, wenn $f_a(x_0) - \alpha f_b(x_0) = 0$ für zwei Elemente a, b und eine Zahl α gilt, so ist auch $g_a(y_0) - \alpha g_b(y_0) = 0$. Hieraus folgt $f_a(x_0) = \gamma g_a(y_0)$ für jedes $a \in \mathfrak{M}$, wenn man eine positive Zahl γ passend annimmt. Nach Satz 1 gibt es ein $a \in \mathfrak{M}$, für das $f_a(x_0) = 1$, und $0 \leqq f_a(x) \leqq 1$ in R_1 ist. Entsprechend $f_a(x)$, gilt auch $0 \leqq g_a(y) \leqq 1$ in R_2 wegen $\operatorname{Max}_{y \in R_2} |g_a(y)| = \operatorname{Max}_{x \in R_1} |f_a(x)|$, und folglich $1 = f_a(x_0) = \gamma g_a(y_0) \leqq \gamma$. Da das Verhältnis symetrisch über R_1 und R_2 ist, so erhält man $\gamma = 1$. Die Eindeutigkeit solcher Zuordnung zwischen R_1 und R_2 kann man leicht aus dem obigen Beweis leicht entnehmen.

Hauptsatz. Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul[8] $\mathfrak{M}$ *den Bedingungen* M), S) *genügt, und über die Norm vollständig ist, so kann man* $\mathfrak{M}$ *durch alle C-Funktionen* $f_a(x)$ (*entsprechend* $a \in \mathfrak{M}$) *auf einem, eindeutig bestimmten, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R vollständig darstellen, und* $\|a\| = \operatorname{Max}_{x \in R} |f_a(x)|$.

Beweis. Jede normale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{M}$ ist offenbar auch ein normierter teilweisegeordneter Modul mit den Bedingungen M), S). $\mathfrak{P}$ ist auch vollständig über die Norm. Dafür braucht man nur zu beweisen: wenn für eine Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots$, $|a_n| \frown |b| = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n \to \infty} \|a_0 - a_n\| = 0$ gilt, so ist auch $|a_0| \frown |b| = 0$. Dies folgt aber sofort aus $\|(|a_0| \frown |b|)\| \leqq \|a_0 - a_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, was man erhält aus $|a_0| \frown |b| \leqq (|a_0 - a_n| + |a_n|) \frown |b| = |a_0 - a_n| \frown |b| \leqq |a_0 - a_n|$.

Für jedes $a \in \mathfrak{M}$ besitzt die normale Mannigfaltigkeit $[a]$ ein vollständiges Element a. Daher kann man $[a]$ durch alle C-Funktionen auf einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R_a darstellen. Für zwei normale Mannigfaltigkeit $[a]$, $[b]$ erhält man durch den Durchschnitt $[a][b]$ eine normale Mannigfaltigkeit, falls $[a][b] \neq 0$. Da $[a] \geqq [a][b]$ ist, gibt es nach Satz 2 die charakteristische Punktmenge R_1 von $[a][b]$ in R_a. Wegen $[b] \geqq [a][b]$, gibt es auch die charakteristische Punktmenge R_2 von $[a][b]$ in R_b. Da R_1 und R_2 beide darstellende Räume von $[a][b]$ sind, gibt es nach Satz 7 eine einzige eineindeutige Zuordnung zwischen R_1 und R_2, damit $[a][b]$ sich durch dieselben C-Funktionen in R_1 und in R_2 vollständig darstellen lässt. Indem man die zugeordneten Punkte in R_a für alle $a \in \mathfrak{M}$ identifiziert, erhält man einen, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R, und R_a ist eine regulär offene Punktmenge in R.

Wenn man jedem $a \in \mathfrak{M}$ die darstellende C-Funktion $f_a(x)$ auf R_a entsprechen lässt, so ist $f_a(x)$ auch eine C-Funktion auf R, wobei natürlich $f_a(x) = 0$ ausserhalb des Raumes R_a ist. Die Isomorphie zwischen a und $f_a(x)$ kann man leicht entnehmen, wenn man für zwei Elemente

8) Vgl. 2).

a, b die Isomorphie nur im Raum $R_{|a| \cup |b|}$ betrachtet. Daher kann man $\mathfrak{M}$ durch ein System $\mathfrak{C}$ von C-Funktionen auf R vollständig darstellen, und $\| a \| = \underset{x \in R}{\mathrm{Max}} | f_a(x) |$.

Nun wollen wir beweisen, dass $\mathfrak{C}$ aus *allen* C-Funktionen auf R besteht. Für jedes $x_1 \in R$ gibt es ein Element $a \in \mathfrak{M}$, für das $R_a \ni x_1$ ist. Dann gibt es nach Satz 1 für jeden anderen Punkt $x_2 \in R$ ein b, für das $f_b(x_1) = 1$ und $f_b(x_2) = 0$ ist. Daher folgt die Behauptung aus dem

Satz 8. Es sei ein teilweisegeordneter Modul[9] $\mathfrak{C}$ *von C-Funktionen auf einem, im kleinen bikompakten, Hausdorffschen Raum R, d. h.* $\mathfrak{C}$ *enthält mit* $f(x)$, $g(x)$ *auch* $\mathrm{Max}\{f(x), g(x)\}$, $\mathrm{Min}\{f(x), g(x)\}$, *und* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ *für beliebige reelle Zahlen* α, β. *Wenn* $\mathfrak{C}$ *über die Norm* $\underset{x \in R}{\mathrm{Max}} | f(x) |$ *vollständig ist, und für je zwei verschiedene Punkte* x_1, x_2 *in R eine derartige C-Funktion* $f(x)$ *enthält, dass* $f(x_1) = 1$ *und* $f(x_2) = 0$ *ist, so besteht* $f(x)$ *aus allen C-Funktionen auf R.*

Beweis. Es sei ein Punkt x_0 und eine abgeschlossene Punktmenge $P \bar{\ni} x_0$. $\mathfrak{C}$ enthält eine C-Funktion $f(x)$, für die $f(x_0) = 1$ ist. Für jede positive Zahl $\varepsilon \, (< 1)$ ist die Punktmenge $E_\varepsilon = E[x; | f(x) | \geqq \varepsilon]$ bikompakt. Folglich ist PE_ε auch bikompakt. Nach Voraussetzung enthält $\mathfrak{C}$ für jeden Punkt $y \in PE_\varepsilon$ eine derartige C-Funktion $f_y(x)$, dass $f_y(x_0) = 1$ und $f_y(y) = 0$ ist. Da $f_y(x)$ stetig auf R ist, gibt es eine Umgebung U_y von y, worin $f_y(x) < \varepsilon$ ist. Da PE_ε bikompakt ist, kann man PE_ε durch endlich viele solche Umgebungen $U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}$ überdecken. Setzt man

$$f_0(x) = \mathrm{Min}\,\{f_{y_1}(x), f_{y_2}(x), \dots, f_{y_n}(x)\},$$

so ist $f_0(x_0) = 1$, und $f_0(x) < \varepsilon$ in P, und $f_0(x)$ gehört zu $\mathfrak{C}$. Da $f_0(x)$ stetig ist, gibt es eine Umgebung U_0 von x_0, worin $f_0(x) < 1 + \varepsilon$ ist. Nach Obigem gibt es auch eine C-Funktion $g_0(x) \in \mathfrak{C}$, für die $g_0(x_0) = 1$, und $g_0(x) < \varepsilon$ in $R - U_0$ ist. Setzt man

$$f_+(x) = \mathrm{Max}\left\{\mathrm{Min}\,\{f_0(x), g_0(x)\}, 0\right\},$$

so ist $f_+(x_0) = 1$, $f_+(x) < \varepsilon$ in P, $0 \leqq f_+(x) < 1 + \varepsilon$ in R, und $f_+(x)$ gehört zu $\mathfrak{C}$.

Es sei eine bikompakte Punktmenge P und eine, von P fremde abgeschlossene Punktmenge Q. Für jeden Punkt $y \in P$ enthält $\mathfrak{C}$ auch nach Obigem eine C-Funktion $f_y(x)$, wobei $f_y(y) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, $f_y(x) < \varepsilon$ in Q, und $0 \leqq f_y(x) < 1 + \varepsilon$ in R ist. Da $f_y(x)$ stetig ist, gibt es eine Umgebung U_y von y, worin $f_y(x) > 1$ ist. Da P bikompakt ist, kann man P durch endlich viele solche Umgebungen $U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}$ überdecken. Setzt man

$$h(x) = \mathrm{Max}\,\{f_{y_1}(x), f_{y_2}(x), \dots, f_{y_n}(x)\},$$

so gehört $h(x)$ zu $\mathfrak{C}$, und $h(x) > 1$ in P, $h(x) < \varepsilon$ in Q, $0 \leqq h(x) < 1 + \varepsilon$ in R.

---

9) Vgl. 2).

Es sei eine beliebige C-Funktion $f(x) \geqq 0$ auf R. Für jede positive Zahl ε gibt es eine Zahlenfolge $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $a_i - a_{i-1} < \varepsilon$, und $f(x) \leqq a_n$ in R. Da die Punktmenge $E[x; f(x) \geqq a_i]$ $(i \geqq 1)$ bikompakt, und $E[x; f(x) \leqq a_{i-1}]$ abgeschlossen ist, gibt es nach Obigem eine C-Funktion $h_i(x) \in \mathfrak{C}$, für die

$$\left.\begin{array}{ll} h_i(x) > 1 & \text{in } E[x; f(x) \geqq a_i] \\ h_i(x) < \dfrac{\varepsilon}{a_n} & \text{in } E[x; f(x) \leqq a_{i-1}] \end{array}\right. \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

und $0 \leqq h_i(x) < 1 + \dfrac{\varepsilon}{a_n}$ in R ist. Setzt man

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) h_i(x),$$

so gehört $h(x)$ auch zu $\mathfrak{C}$, und für jeden Punkt $x \in E[x; a_{j-1} \leqq f(x) \leqq a_j]$ gilt $\sum_{i=1}^{j-1} (a_i - a_{i-1}) \leqq h(x) \leqq \sum_{i=1}^{j} (a_i - a_{i-1}) \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{a_n}\right) + \sum_{i=j+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \dfrac{\varepsilon}{a_n}$, nämlich $a_{j-1} \leqq h(x) \leqq a_j + \varepsilon$. Daher gilt für jeden Punkt $x \in R$

$$|f(x) - h(x)| \leqq 2\varepsilon.$$

Da $\mathfrak{C}$ über die Norm $\operatorname*{Max}_{x \in R} |f(x)|$ vollständig ist, muss $f(x)$ zu $\mathfrak{C}$ gehören.

Wenn $f(x)$ eine beliebige C-Funktion auf R ist, so sind

$$f_+(x) = \operatorname{Max} \{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = -\operatorname{Min} \{f(x), 0\}$$

auch beide C-Funktionen auf R, und nach Obigem gehören beide zu $\mathfrak{C}$, und folglich gehört $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ zu $\mathfrak{C}$, womit die Behauptung bewiesen ist.